

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

MEC554

Antoine SELLIER

Benjamin LECLAIRE et Vincent BRION

POLYCOPIE

- petits caractères: pas exigés

AMPHIS

- dégagent et illustrent les idées directrices
 - pas un résumé du polycopié!
 - transparents mis sur moodle(le mercredi après-midi après le cours)

PETITES CLASSES

- mise en oeuvre directe des concepts
 - synchronisées avec les Amphis

EQUIPE ENSEIGNANTE

- Antoine Sellier (LadHyX)
- Benjamin Leclaire (Onera) et Vincent Brion (Onera)

9 SEANCES AMPHI+PC (mercredi **sauf mardi 10 novembre**)

- Amphis en Grégory, PC au Bâtiment Liouville (salle 20.09 ou 20.10)
 - 23, 30 septembre
 - 7, 14, 21 octobre
 - 4, 10 (**mardi!**), 18 novembre
 - 2 décembre

Deux sujets durant cet enseignement

- Un DM (devoir à la maison): vacances de la toussaint
- Un sujet écrit de 2h ou 3h: le 17 décembre (14h00-17h00)

NOTE de module: $N=N1+N2+N3+N4$

N1=note de présence et participation en Amphi sur 2 points

N2=note du devoir à la maison (donné avant la toussaint) sur 4 points

N3=note de l'examen écrit final (17 décembre 2025) sur 14 points

N4=note **BONUS** de présence et participation en PC sur 2 points

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

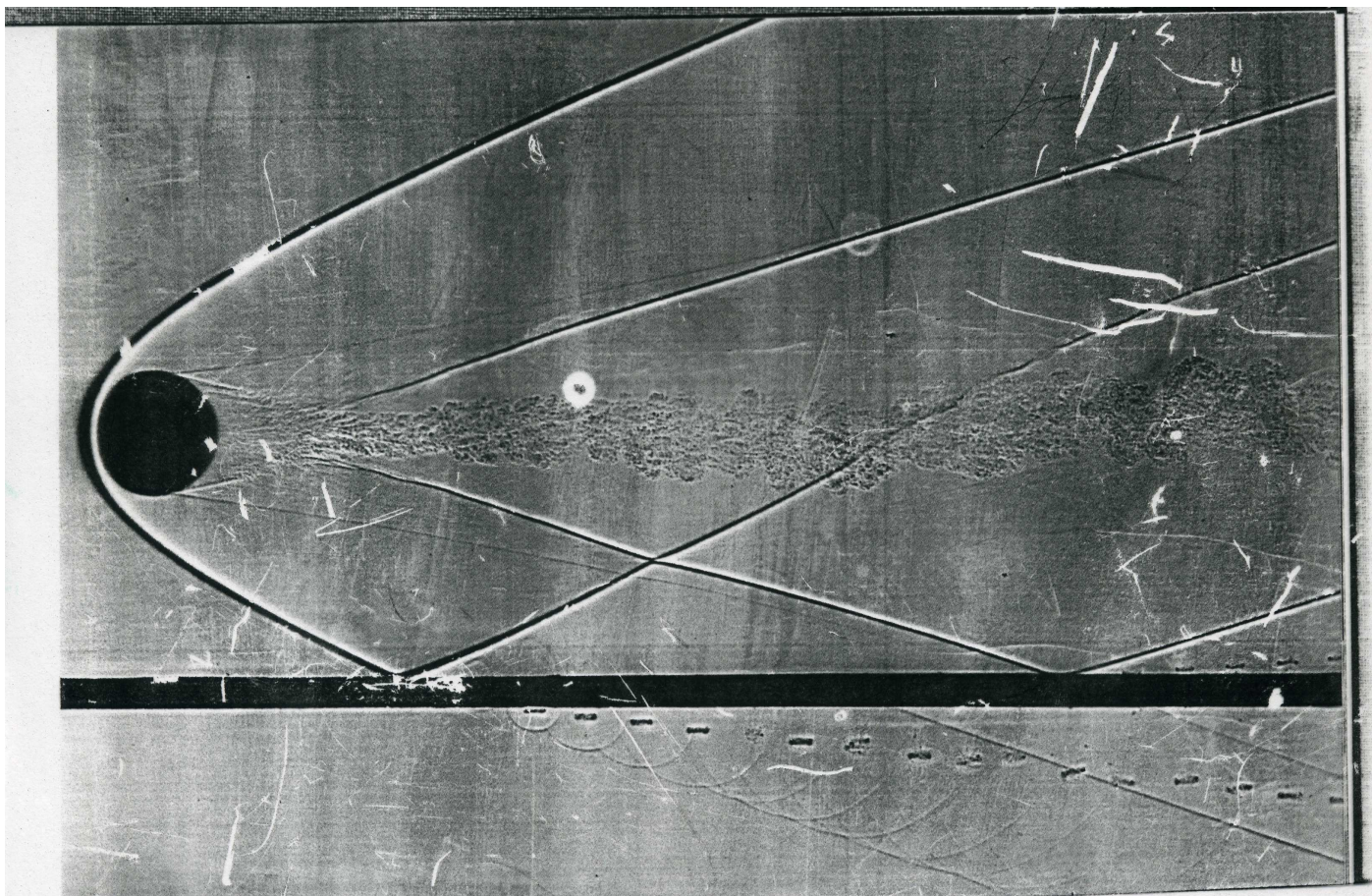
- quand? (acoustique, haute vitesse)
 - observations expérimentales

OBJECTIFS DU COURS

- modélisation simple
 - onde de choc?
- existence? formation? propriétés?

AERODYNAMIQUE

- interne (tuyère)
- externe (corps en mouvement, profil d'aile)



AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

- quand? (acoustique, haute vitesse)
 - observations expérimentales

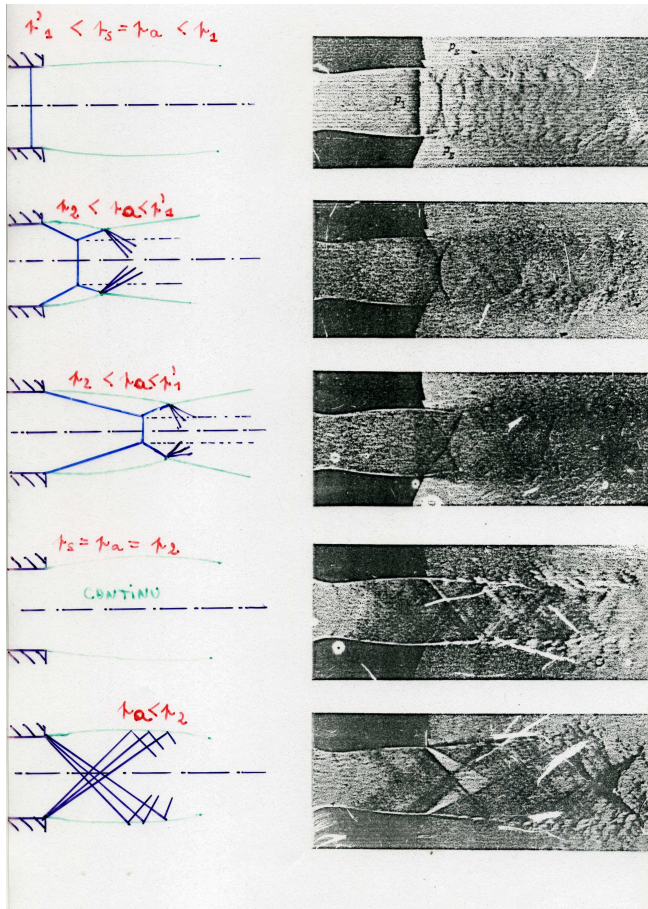
OBJECTIFS DU COURS

- modélisation simple
 - onde de choc?
- existence? formation? propriétés?

AERODYNAMIQUE

- interne (tuyère)
- externe (corps en mouvement, profil d'aile)

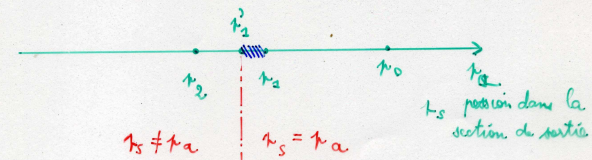
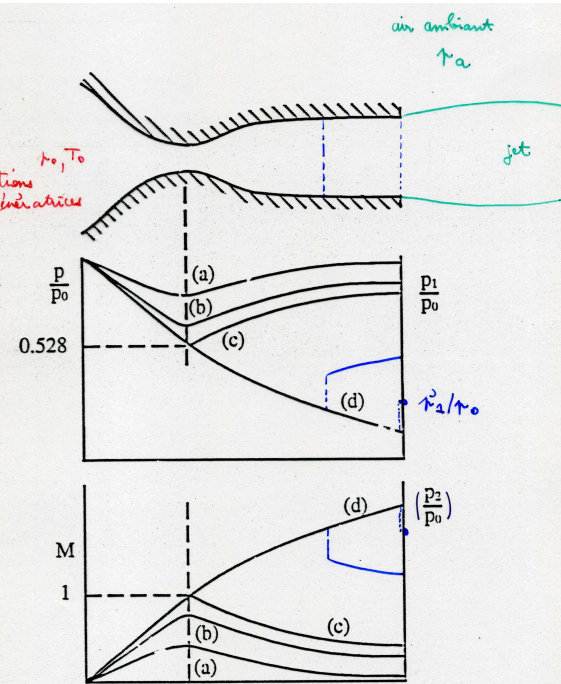




p_1
 p_2

p_1, T_0
 Conditions
 générales

p_2



AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

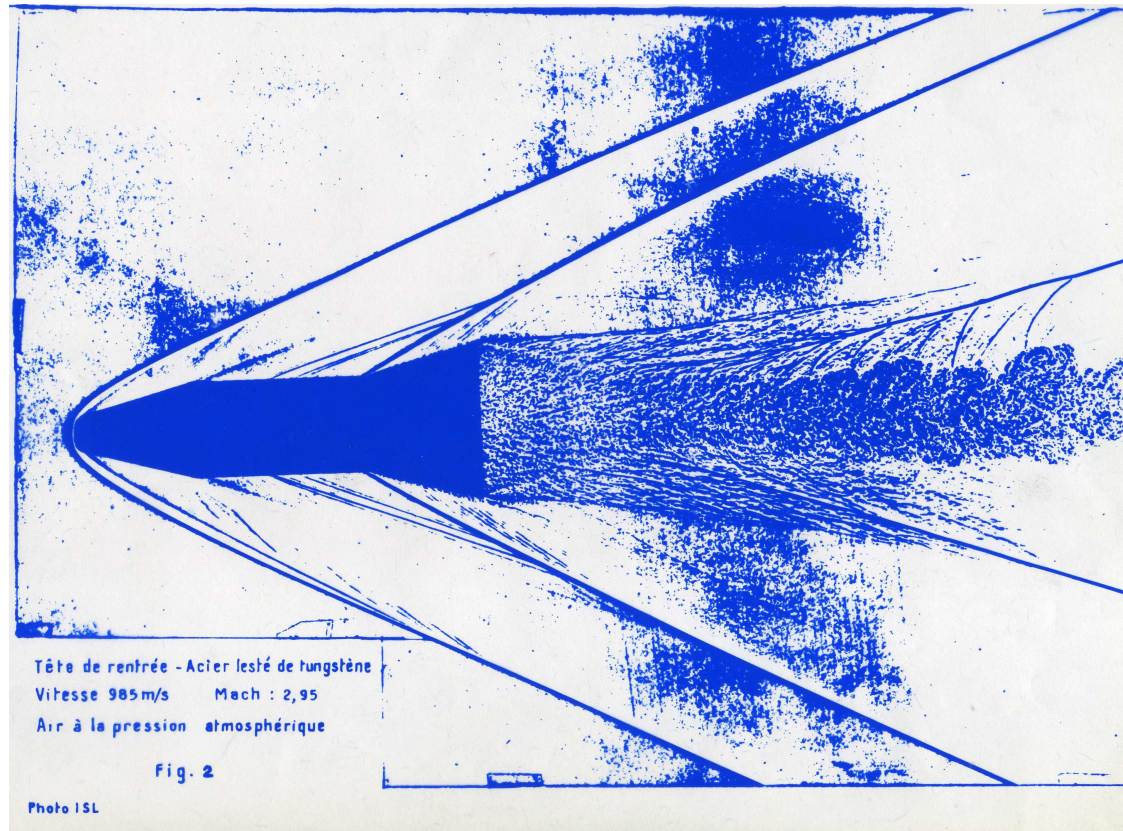
- quand? (acoustique, haute vitesse)
 - observations expérimentales

OBJECTIFS DU COURS

- modélisation simple
 - onde de choc?
- existence? formation? propriétés?

AERODYNAMIQUE

- interne (tuyère)
- externe (corps en mouvement, profil d'aile)



AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Natures et propriétés des surfaces de discontinuités.
Chocs droit, oblique et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan.
Profils d’aile

Chapitre 1: 1.1, 1.2 et 1.3 (pages 1-22)

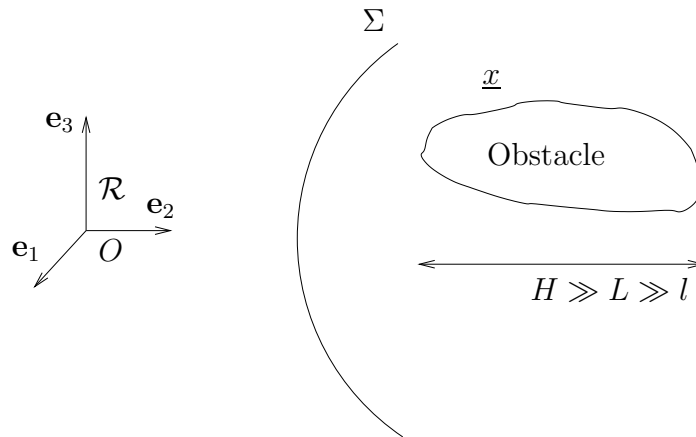
MODELISATION. LOIS DE LA PHYSIQUE DU FLUIDE

- Milieu Continu. Description Eulérienne. Dérivée particulaire

LOIS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE: FORME GLOBALE

- Bilan global pour l'observateur
- Bilan global général. Récapitulatif
 - Conservation de la masse
- Loi fondamentale de la dynamique. Définition du Fluide
 - Premier principe de la thermodynamique
 - Second principe de la thermodynamique

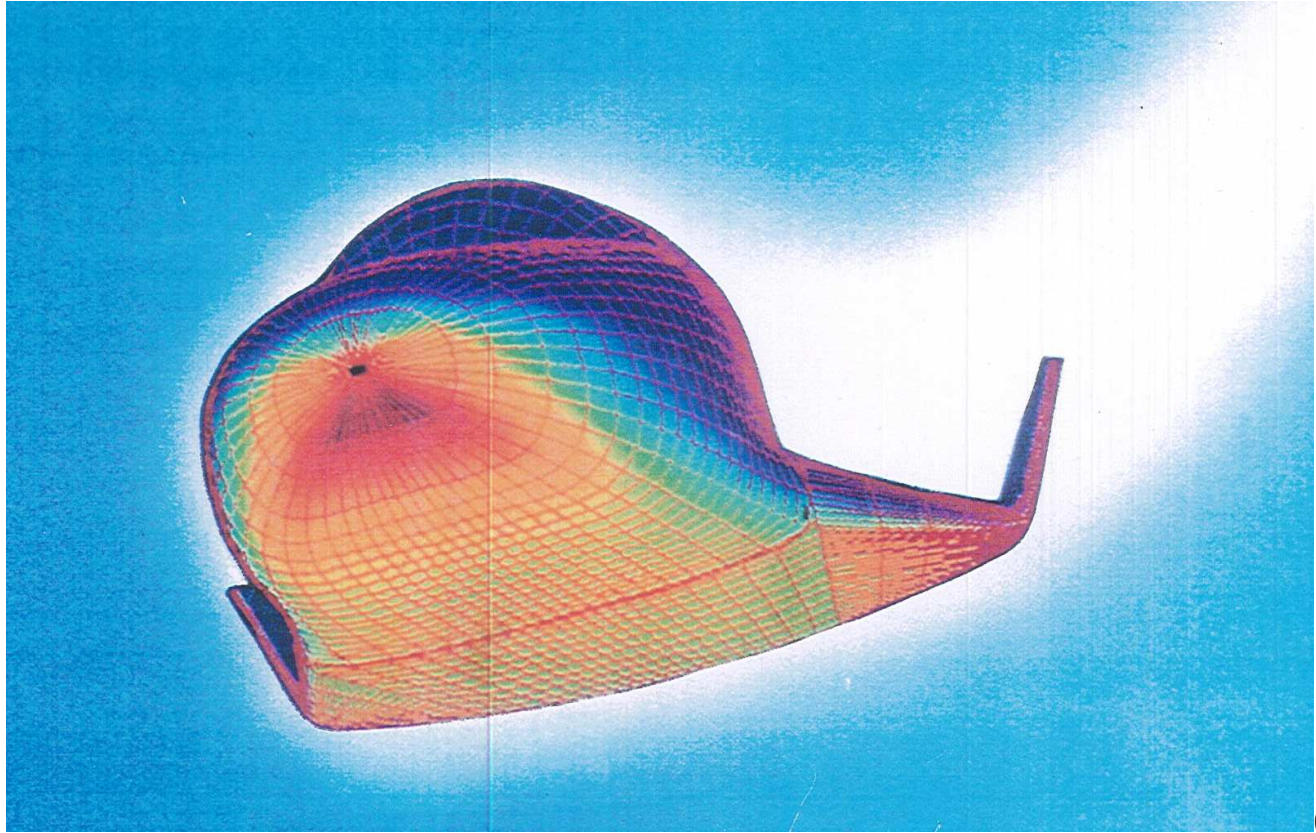
MILIEU CONTINU



- L : échelle spatiale de modélisation avec $l \ll L$
- Moyenne sur volume de taille ϵ avec $l \ll \epsilon \ll L$
 - Grandeur macroscopique $g(\underline{x}, t)$

SURFACE DE DISCONTINUITES

- $\Sigma(t)$ mobile mais **INERTE**



Description Eulérienne

- grandeur $\mathcal{G}$: repérée par $g(\underline{x}, t)$
- champ Eulérien des vitesses: $\underline{U}(\underline{x}, t)$
 - lignes de courant à t fixé

$$\frac{dx_1}{U_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{U_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{U_3(\underline{x}, t)}$$

- trajectoire d'une particule fluide

$$\underline{x} = \underline{X} = X_i \underline{e}_i \quad \text{à } t_0$$
$$\frac{dx_i}{dt} = U_i(\underline{x}, t)$$

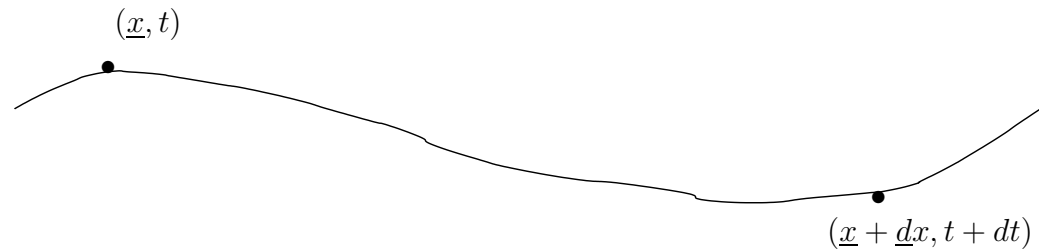
- Ecoulement stationnaire=permanent

Description Eulérienne fonction que de $\underline{x}$.

Ainsi, $g(\underline{x}, t) = g(\underline{x})$ pour toute grandeur $\mathcal{G}$.

Trajectoires et lignes de courant se confondent

Dérivée particulière?



$\mathcal{G}$ est repérée par $g(\underline{x}, t)$

Suivi de la même particule: $\underline{dx} = \underline{U}(\underline{x}, t)dt$

$$\frac{dg}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{g[\underline{x} + \underline{U}(\underline{x}, t)dt, t + dt] - g(\underline{x}, t)}{dt}$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \underline{grad}[g] \cdot \underline{U}$$

Rappel

$$\underline{grad}[g] = \frac{\partial g}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3} \underline{e}_3 = \frac{\partial g}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

Accélération?

$$\underline{\Gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt}, \quad \underline{\Gamma} \cdot \underline{e}_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j}$$

Masse volumique $\rho(\underline{x}, t)$?

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 : \text{ incompressible}$$

Pas forcément $\rho = cste$ partout (homogène)!

PROBLEME GENERAL?

INCONNUES

- description cinématique Eulérienne: $\underline{U}(\underline{x}, t)$
 - corps divariant: $\rho(\underline{x}, t), \quad p(\underline{x}, t)$

DONNEES

- conditions initiales (t_0) et aux limites du domaine d'écoulement
 - corps divariant: $\rho(\underline{x}, t), \quad p(\underline{x}, t)$
- sollicitations extérieures: pesanteur, rayonnement, ...

LOIS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE

- conservation de la masse
 - loi de la dynamique (comportement, nature)
- thermodynamique (premier et second principes, nature du corps)

Chapitre 1: 1.1, 1.2 et 1.3 (pages 1-22)

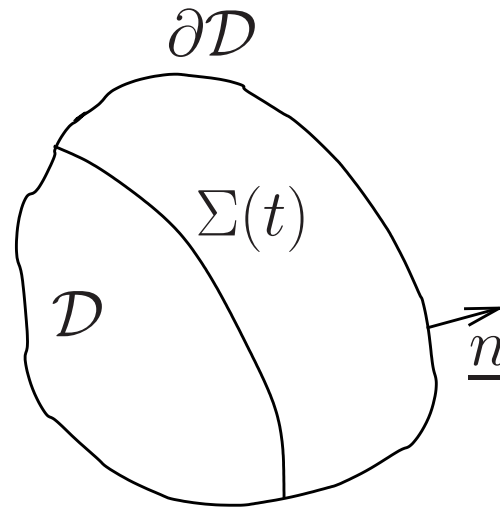
MODELISATION. LOIS DE LA PHYSIQUE DU FLUIDE

- Milieu Continu. Description Eulérienne. Dérivée particulière

LOIS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE: FORME GLOBALE

- Bilan global pour l'observateur
- Bilan global général. Récapitulatif
 - Conservation de la masse
- Loi fondamentale de la dynamique. Définition du Fluide
 - Premier principe de la thermodynamique
 - Second principe de la thermodynamique

Bilan global pour l'observateur



$\mathcal{D}$ domaine fixe de frontière $\partial\mathcal{D}$. $\Sigma(t)$ INERTE vis à vis de $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega$$

Bilan global

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} (F\underline{U} - \underline{A}) \cdot \underline{n} da$$

Chapitre 1: 1.1, 1.2 et 1.3 (pages 1-22)

MODELISATION. LOIS DE LA PHYSIQUE DU FLUIDE

- Milieu Continu. Description Eulérienne. Dérivée particulaire

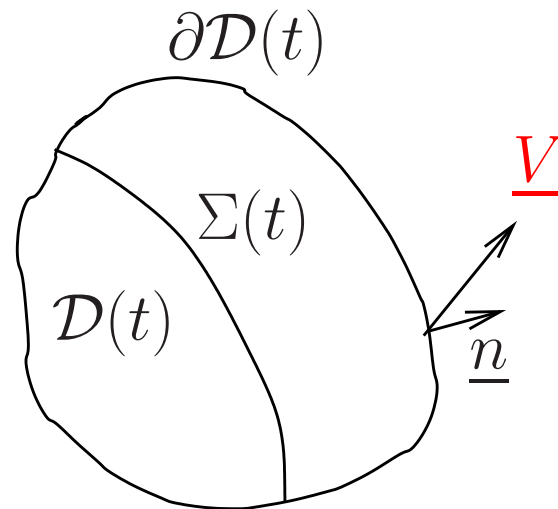
LOIS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE: FORME GLOBALE

- Bilan global pour l'observateur
- Bilan global général. Récapitulatif
 - Conservation de la masse
- Loi fondamentale de la dynamique. Définition du Fluide
 - Premier principe de la thermodynamique
 - Second principe de la thermodynamique

Dérivée d'une intégrale de volume en suivant la matière?

$\mathcal{D}(t)$ **mobile!** (doté de son champ de vitesse $\underline{V}$)

$$\int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega, \quad \frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega?$$



Si continuité par morceaux de $\underline{V}$, F et son gradient (polycopié)

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} F \underline{V} \cdot \underline{n} da$$

BILANS GLOBAUX OBTENUS

Bilan global général

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}} [F(\underline{U} - \underline{V}) - \underline{A}] \cdot \underline{n} da$$

Bilan global de l'observateur

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}} (F\underline{U} - \underline{A}) \cdot \underline{n} da$$

Bilan global en suivant la matière

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} P_F(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{A} \cdot \underline{n} da$$

Valables avec une surface de discontinuités $\Sigma(t)$ éventuelle

INERTE vis à vis de $\mathcal{F}$

Chapitre 1: 1.1, 1.2 et 1.3 (pages 1-22)

MODELISATION. LOIS DE LA PHYSIQUE DU FLUIDE

- Milieu Continu. Description Eulérienne. Dérivée particulaire

LOIS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE: FORME GLOBALE

- Bilan global pour l'observateur
- Bilan global général. Récapitulatif
 - Conservation de la masse
- Loi fondamentale de la dynamique. Définition du Fluide
 - Premier principe de la thermodynamique
 - Second principe de la thermodynamique

CONSERVATION DE LA MASSE

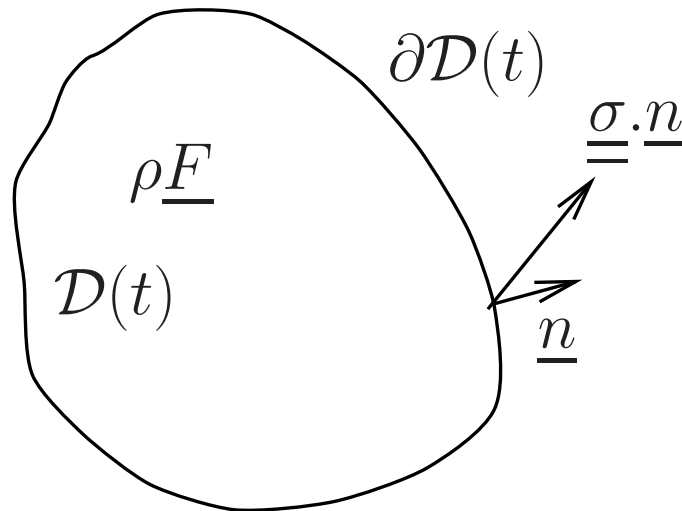
- Système **matériel**: matière occupant $\mathcal{D}(t)$ à t
 - Bilan global

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho d\Omega = 0$$

- Bilan global pour l'observateur

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{x}, t) d\Omega = - \int_{\partial \mathcal{D}} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} da$$

LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE



$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{\underline{U}} d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{\underline{F}} d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} da$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est **symétrique** ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)

MILIEU FLUIDE ET FLUIDE PARFAIT

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p \underline{n} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}$$

$\underline{\underline{\tau}}$ s'annule avec le gradient de $\underline{U}$

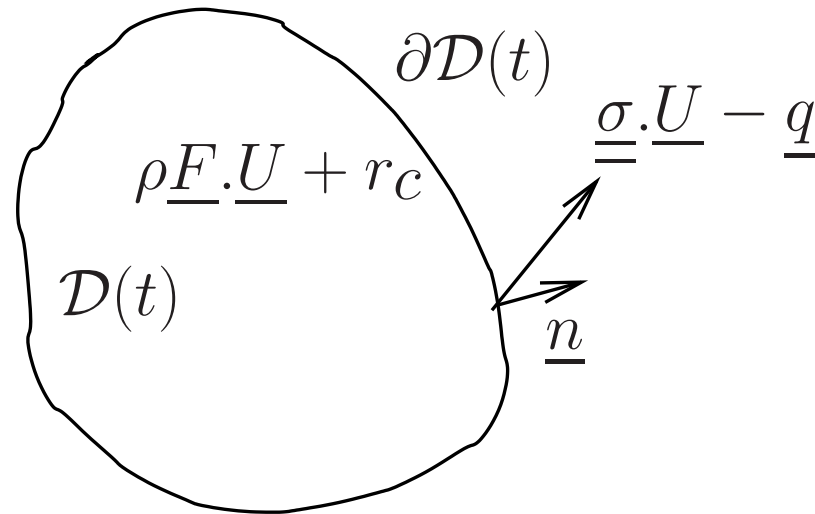
Fluide parfait: $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p \underline{n}$
 p : pression thermodynamique

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} p \underline{n} da$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}} [p \underline{n} + \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}) \underline{U}] da$$

PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

- Thermodynamique **classique**: $dE = \delta W + \delta Q$ pour un système **fermé**
 - Thermodynamique du milieu continu



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\Omega &= \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n} da \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}(t)} r_c d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{q} \cdot \underline{n} da \end{aligned}$$

- r_c : taux volumique de chaleur et $\underline{q}$: vecteur flux de chaleur

SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

- Thermodynamique **classique**: $dE = TdS - pdV$, $dS \geq \sum_i \frac{\delta Q_i}{T_i}$
pour un système **fermé**

- Thermodynamique du milieu continu

$s = s(e, \rho)$ entropie massique, spécifique

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad \text{Gibbs}$$

- Second principe ou principe d'évolution

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho s(\underline{x}, t) d\Omega \geq \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{r_c}{T} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} da$$

- = à la réversibilité

- > évolution **irréversible**

MODELISATION. LOIS DE LA PHYSIQUE DU FLUIDE

- Milieu Continu. Description Eulérienne. Dérivée particulière

LOIS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE: FORME GLOBALE

- Bilan global pour l'observateur
- Bilan global général. Récapitulatif
 - Conservation de la masse
- Loi fondamentale de la dynamique. Définition du Fluide
 - Premier principe de la thermodynamique
 - Second principe de la thermodynamique

CAS DU FLUIDE PARFAIT NON CONDUCTEUR DE LA CHALEUR, SANS TAUX DE CHALEUR EXTERIEUR

EN SUIVANT LA MATIERE

Fluide parfait non conducteur sans taux de chaleur extérieur

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho d\Omega = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} p \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} . \underline{U} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} p \underline{U} . \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho s(\underline{x}, t) d\Omega \geq 0$$

=: réversibilité >: irréversibilité

POUR UN DOMAINE FIXE

Fluide parfait non conducteur sans taux de chaleur extérieur

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho d\Omega = - \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} da$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} [p \underline{n} + \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}) \underline{U}] da$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho (e + \frac{1}{2} U^2) d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} \rho [e + p/\rho + \frac{1}{2} U^2] (\underline{U} \cdot \underline{n}) da$$

Enthalpie totale massique (spécifique): $H = e + p/\rho + U^2/2$

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho s(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho s \underline{U} \cdot \underline{n} da \geq 0$$

$=$: réversibilité $>$: irréversibilité

PC 1

- Ecoulement **unidimensionnel** **CONTINU**
 - Désigner un délégué

AMPHI 2:

- **Discontinuités!**
 - **Choc droit**