

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

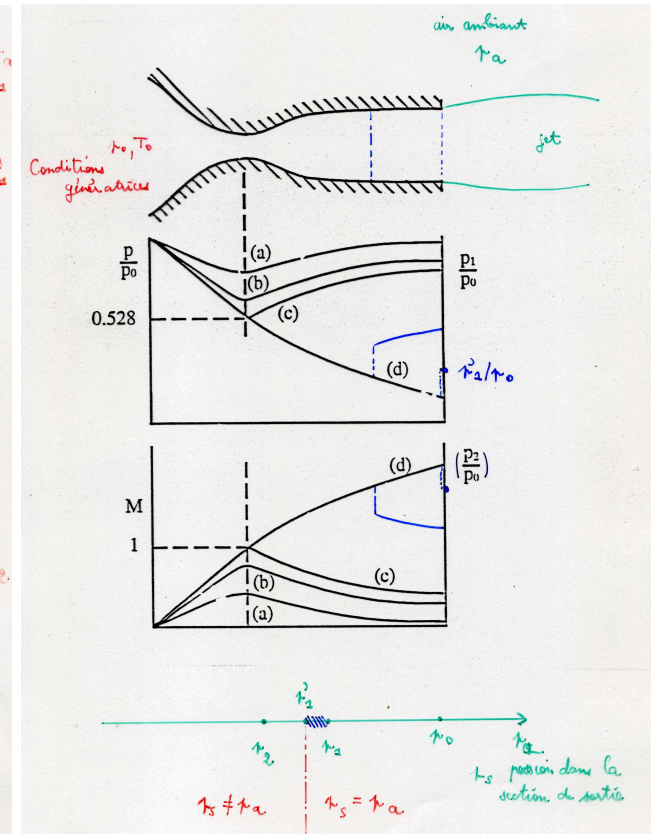
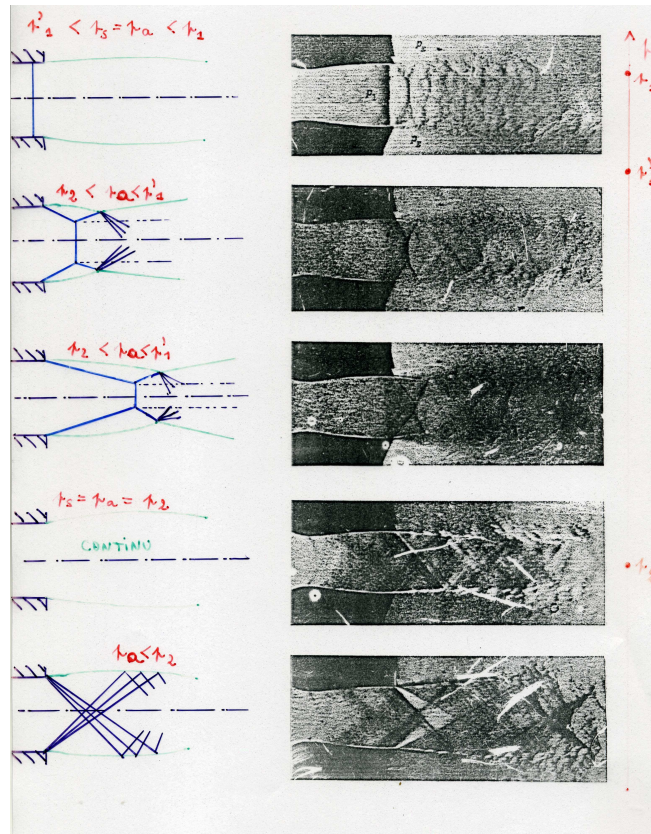
SEANCE 2

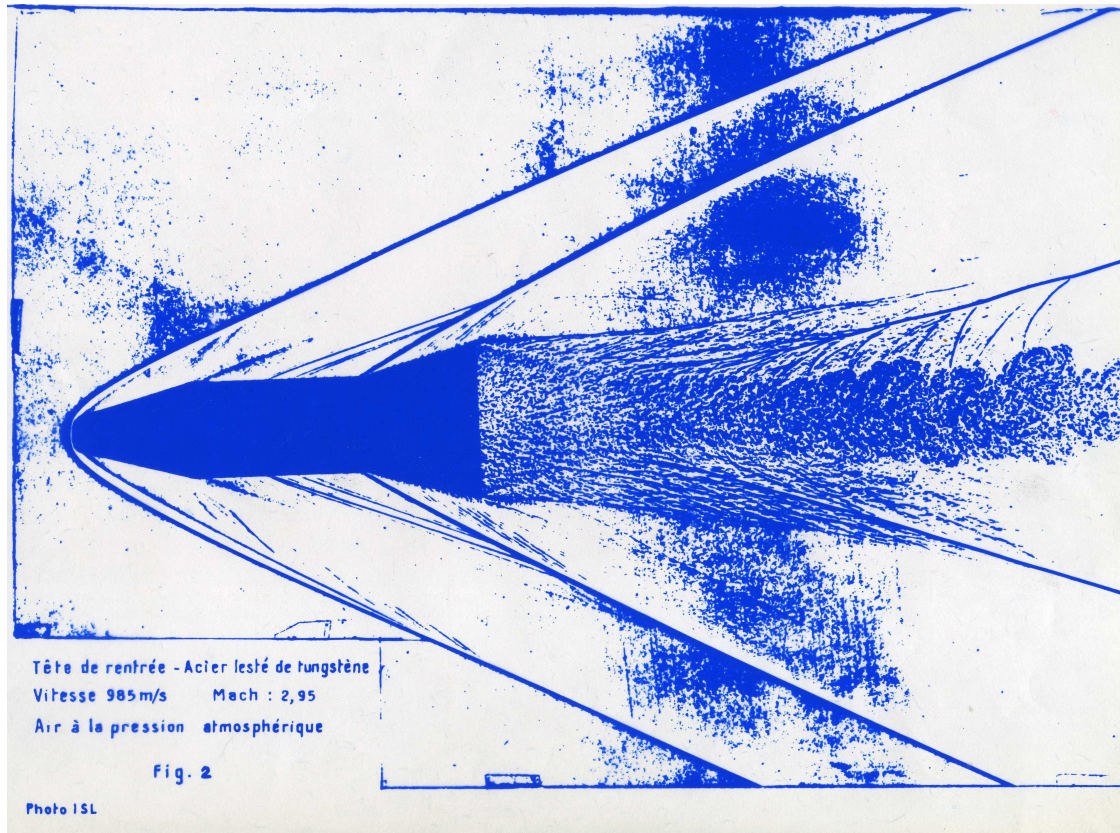
AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Natures et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs oblique et courbe
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan.
Profils d’aile







DISCONTINUITES. CAS DU CHOC DROIT

Chapitres 1 (1.4.1) et 3 (3.1, 3.2)

MOTIVATIONS

- Tuyère: dans le divergent, dans le jet
- Écoulement supersonique autour d'un obstacle

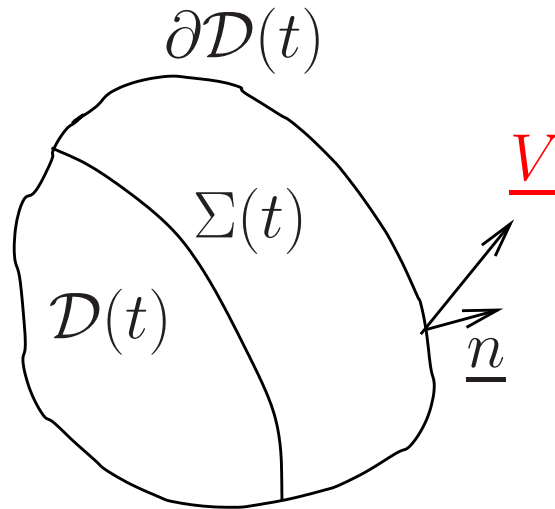
ÉCOULEMENT DISCONTINU. RELATIONS DE SAUT (1.4.1)

- Bilan global général. Bilan local et relation de saut associés
 - Application aux lois de la physique
- Surfaces de contact, de glissement et ondes de chocs

CAS DU CHOC DROIT (3.1, 3.2)

- Définition. Résolution graphique
- Condition d'existence et propriétés
 - Cas du gaz parfait polytropique

Bilan sous forme globale (Amphi 1)



Bilan global général et en suivant la matière

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} [F(\underline{U} - \underline{V}) - \underline{A}] \cdot \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} P_F(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{A} \cdot \underline{n} da$$

$\Sigma(t)$: surface de discontinuités **INERTE** vis à vis de $\mathcal{F}$

Lien important

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} F \underline{U} \cdot \underline{n} da$$

Cas d'une fonction F régulière
(continûment différentiable)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F d\Omega &= \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F \underline{U}) \right] d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div}(\underline{U}) \right] d\Omega \end{aligned}$$

Forme alternative

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{grad}[F] \cdot \underline{U} \\ \operatorname{div}(F \underline{U}) &= F \operatorname{div}(\underline{U}) + \underline{grad}[F] \cdot \underline{U} \end{aligned}$$

Cas du bilan de la masse

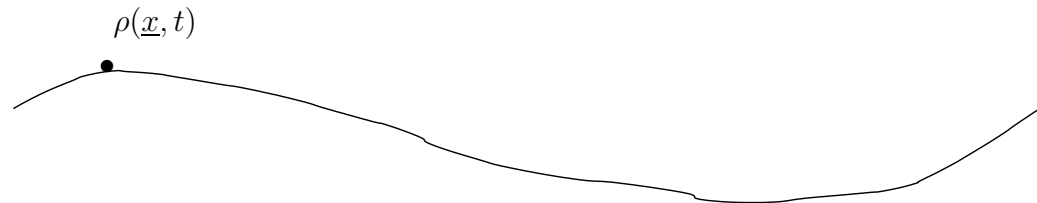
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho d\Omega = 0$$

Bilan sous forme locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{U}) = 0$$

Remarques

- régularité et domaines élémentaires 3D
 - $\frac{d\rho}{dt} = 0$: écoulement incompressible



- $\rho = cste$: écoulement homogène

Cas d'un bilan général

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} P_F + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{A} \cdot \underline{n} da$$

Lien utile pour $F = \rho f$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho f d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{df}{dt} d\Omega$$

bilan **local** associé

$$\rho \frac{df}{dt} = P_F + \text{div}(\underline{A})$$

Si P_F continu et $\underline{A}$ continûment différentiable

DISCONTINUITES. CAS DU CHOC DROIT

Chapitres 1 (1.4.1) et 3 (3.1, 3.2)

MOTIVATIONS

- Tuyère: dans le divergent, dans le jet
- Écoulement supersonique autour d'un obstacle

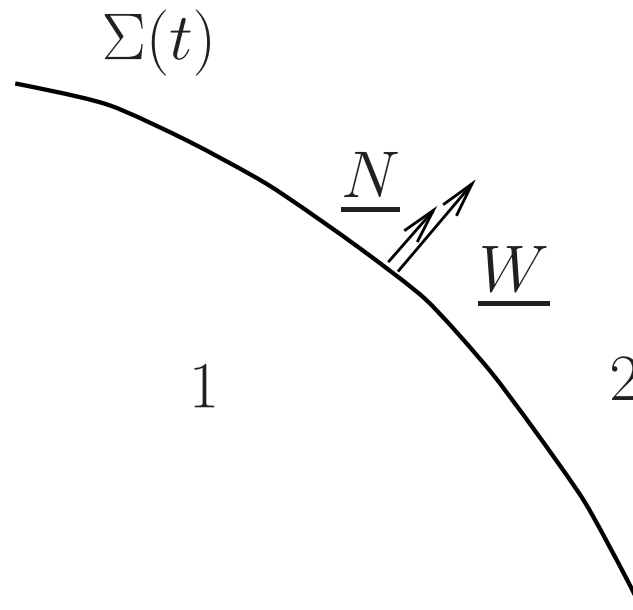
ÉCOULEMENT DISCONTINU. RELATIONS DE SAUT (1.4.1)

- Bilan global général. Bilan local et relation de saut associés
 - Application aux lois de la physique
- Surfaces de contact, de glissement et ondes de chocs

CAS DU CHOC DROIT (3.1, 3.2)

- Définition. Résolution graphique
- Condition d'existence et propriétés
 - Cas du gaz parfait polytropique

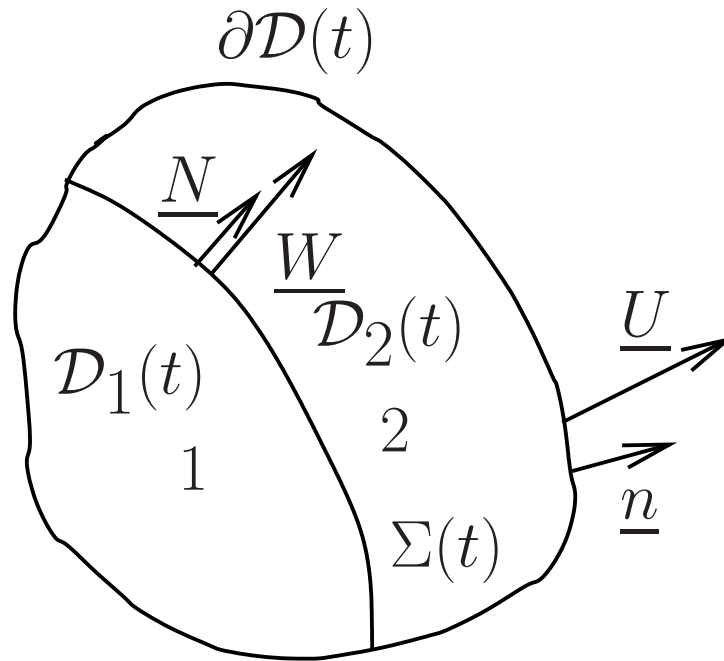
Cas d'une surface de discontinuités mobile et **inerte**



A continûment différentiable dans $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$

$$\int_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{A} \cdot \underline{n} da = \int_{\mathcal{D}(t)} \text{div} \underline{A} d\Omega + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{N} da$$

$$\llbracket g \rrbracket = g(2) - g(1), \quad \underline{N} \text{ de } 1 \text{ vers } 2$$



Décomposition avec $\mathcal{D}_1(t)$ et $\mathcal{D}_2(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F d\Omega = \frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}_1}} \int_{\mathcal{D}_1(t)} F d\Omega + \frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}_2}} \int_{\mathcal{D}_2(t)} F d\Omega \quad \text{avec} \quad \underline{V}_i = \underline{W} \quad \text{sur} \quad \Sigma(t), \underline{V}_i = \underline{U} \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_i \setminus \Sigma(t)$$

Rappel (Amphi 1)

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}_1}} \int_{\mathcal{D}_1(t)} F d\Omega = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}_1} F d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}_1(t)} F \underline{V}_1 \cdot \underline{n} da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_1(t)} F d\Omega + \int_{\Sigma(t)} [F(\underline{W} - \underline{U}) \cdot \underline{N}] (1) da$$

Seconde relation utile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F d\Omega &= \int_{\Sigma(t)} \llbracket F(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket . \underline{N} da \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_1(t)} F d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_2(t)} F d\Omega \end{aligned}$$

Résultats pour $F = \rho f$, P_F , $\underline{A}$ et $\underline{U}$
continûment différentiables dans $\mathcal{D}_i(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_i(t)} \rho f d\Omega = \int_{\mathcal{D}_i(t)} \rho \frac{df}{dt} d\Omega$$

$$\rho \frac{df}{dt} = P_F + \operatorname{div}(\underline{A})$$

Réécriture du bilan global

$$\int_{\mathcal{D}_1(t) \cup \mathcal{D}_2(t)} \left\{ \rho \frac{df}{dt} - P_F - \operatorname{div} \underline{A} \right\} d\Omega + \int_{\Sigma(t)} \llbracket F(\underline{U} - \underline{W}) - \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{N} da = 0$$

Bilans **global**, **local** et relation de saut

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho f d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} P_F d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{A} \cdot \underline{n} da$$

$$\rho \frac{df}{dt} = P_F + \operatorname{div} \underline{A}, \quad \text{local}$$

$$\llbracket F(\underline{U} - \underline{W}) - \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{N} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(t) \text{ inerte}$$

DISCONTINUITES. CAS DU CHOC DROIT

Chapitres 1 (1.4.1) et 3 (3.1, 3.2)

MOTIVATIONS

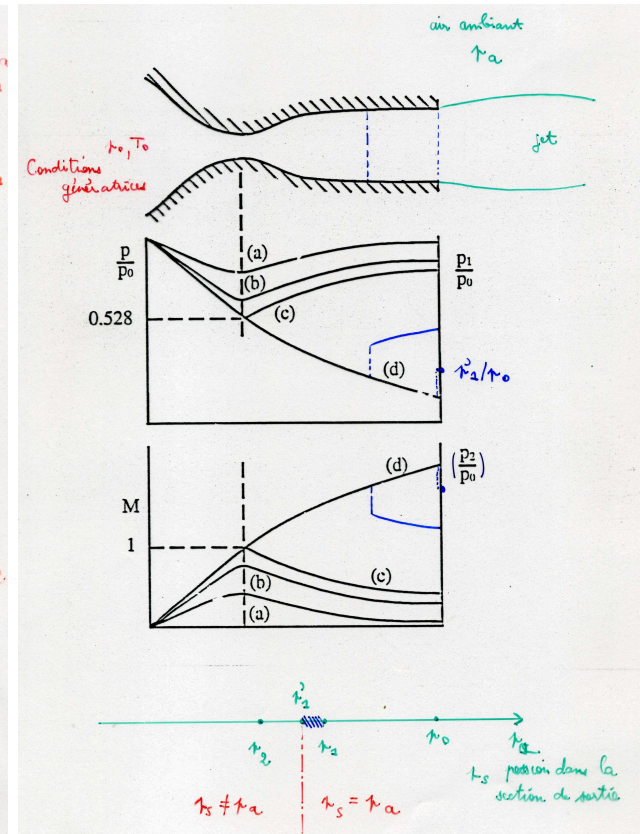
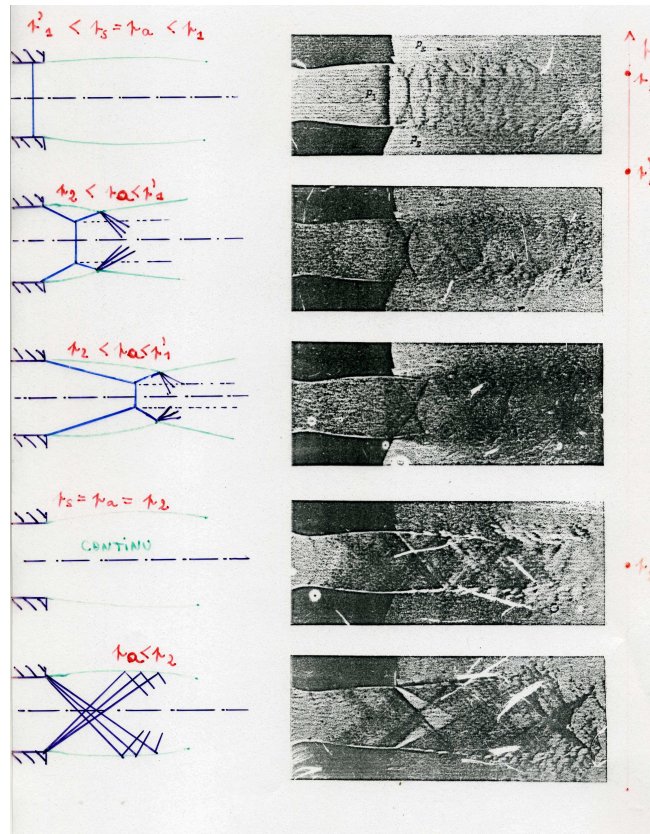
- Tuyère: dans le divergent, dans le jet
- Écoulement supersonique autour d'un obstacle

ÉCOULEMENT DISCONTINU. RELATIONS DE SAUT (1.4.1)

- Bilan global général. Bilan local et relation de saut associés
 - Application aux lois de la physique
- Surfaces de contact, de glissement et ondes de chocs

CAS DU CHOC DROIT (3.1, 3.2)

- Définition. Résolution graphique
- Condition d'existence et propriétés
 - Cas du gaz parfait polytropique



EN SUIVANT LA MATIERE (Amphi 1)

Fluide parfait non conducteur sans taux de chaleur extérieur

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho d\Omega = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} p \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} . \underline{U} d\Omega - \int_{\partial \mathcal{D}(t)} p \underline{U} . \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho s(\underline{x}, t) d\Omega \geq 0$$

=: réversibilité >: irréversibilité

APPLICATION AU FLUIDE NON VISQUEUX ET NON CONDUCTEUR DE LA CHALEUR

Bilan de masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{U}) = 0, \quad \llbracket \rho(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} = 0 \text{ sur } \Sigma(t)$$

Loi fondamentale de la dynamique

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} - \operatorname{grad}[p], \quad \llbracket \rho \underline{U}(\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} + p \underline{N} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Sigma(t)$$

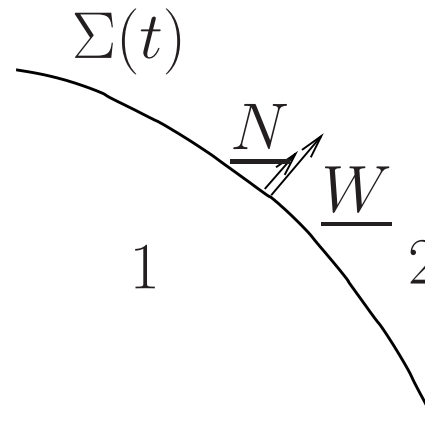
Premier principe de la thermodynamique

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} - \operatorname{div}(p \underline{U}), \quad \llbracket \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) (\underline{U} - \underline{W}) + p \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{N} = 0 \text{ sur } \Sigma(t)$$

Second principe de la thermodynamique

$$\frac{ds}{dt} \geq 0, \quad \llbracket \rho s(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} \geq 0 \text{ sur } \Sigma(t)$$

Transcription des équations de saut sur la surface de discontinuités!



$$v_i = (\underline{U}_i - \underline{W}) \cdot \underline{N} \geq 0$$

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = m \geq 0$$

$$\rho_1 v_1 U_{1n} + p_1 = \rho_2 v_2 U_{2n} + p_2, \quad \rho_1 v_1 U_{1t} = \rho_2 v_2 U_{2t}$$

$$\rho_1 v_1 \left(e_1 + \frac{U_1^2}{2} \right) + p_1 U_{1n} = \rho_2 v_2 \left(e_2 + \frac{U_2^2}{2} \right) + p_2 U_{2n}$$

$$m(s_2 - s_1) \geq 0$$

Différents types de surfaces de discontinuités

- Surface de contact ou de glissement: $m = 0$

$$p_1 = p_2 \text{ et } U_{1n} = U_{2n}$$

$$U_{1t} = U_{2t} \quad \text{contact}$$

$$U_{1t} \neq U_{2t} \quad \text{glissement}$$

- ONDE DE CHOC: $m > 0$

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 > 0$$

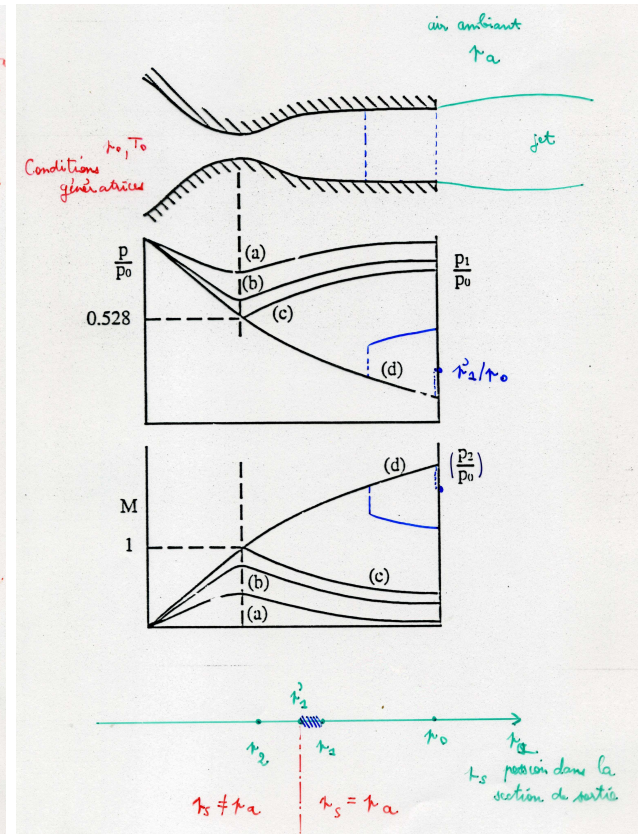
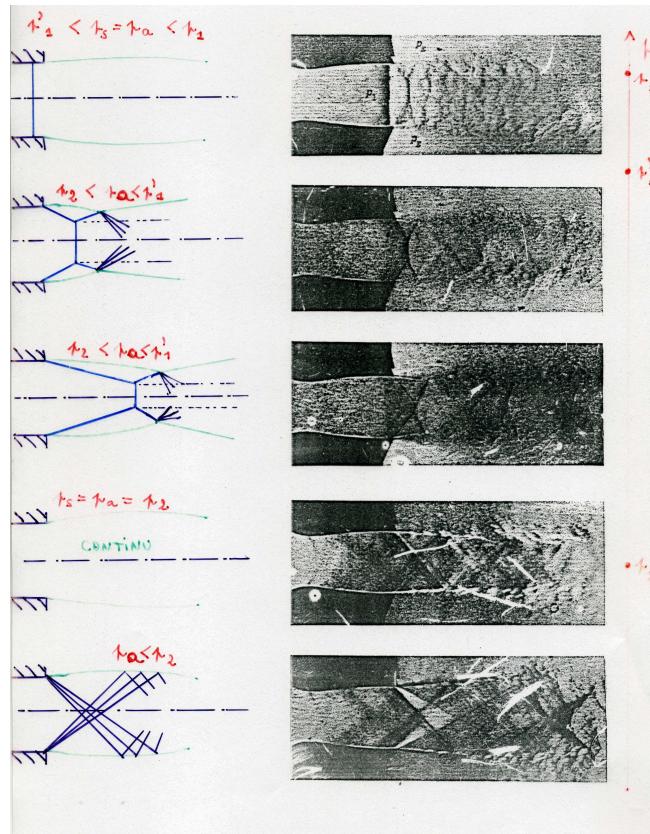
$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad U_{1t} = U_{2t}$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}, \quad h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$s_2 \geq s_1$$

$$\rho_1 \neq \rho_2 \quad \text{et} \quad s_2 > s_1$$

$$s = s(p, \rho), \quad h = h(p, \rho)$$



DISCONTINUITES. CAS DU CHOC DROIT

Chapitres 1 (1.4.1) et 3 (3.1, 3.2)

MOTIVATIONS

- Tuyère: dans le divergent, dans le jet
- Écoulement supersonique autour d'un obstacle

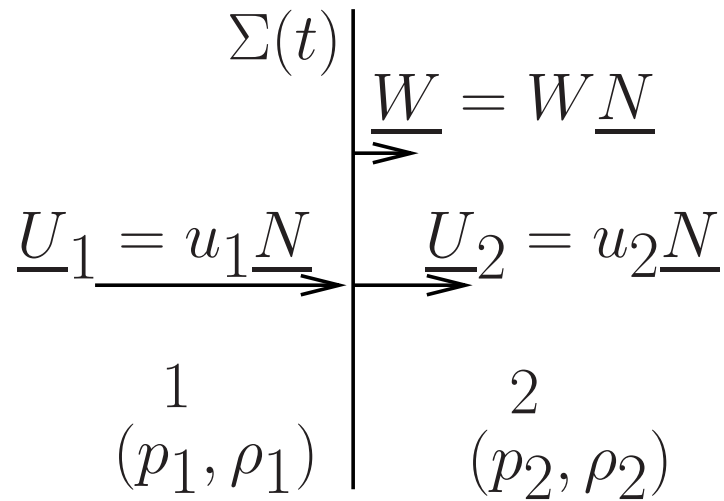
ÉCOULEMENT DISCONTINU. RELATIONS DE SAUT (1.4.1)

- Bilan global général. Bilan local et relation de saut associés
 - Application aux lois de la physique
- Surfaces de contact, de glissement et ondes de chocs

CAS DU CHOC DROIT (3.1, 3.2)

- Définition. Résolution graphique
- Condition d'existence et propriétés
 - Cas du gaz parfait polytropique

CHOC DROIT



Condition d'existence

$$M_1 = \frac{u_1 - W}{c_1} > 1!$$

Propriétés

$$M_2 = \frac{u_2 - W}{c_2} < 1, \quad p_2 > p_1, \quad u_2 < u_1, \quad \rho_2 > \rho_1$$

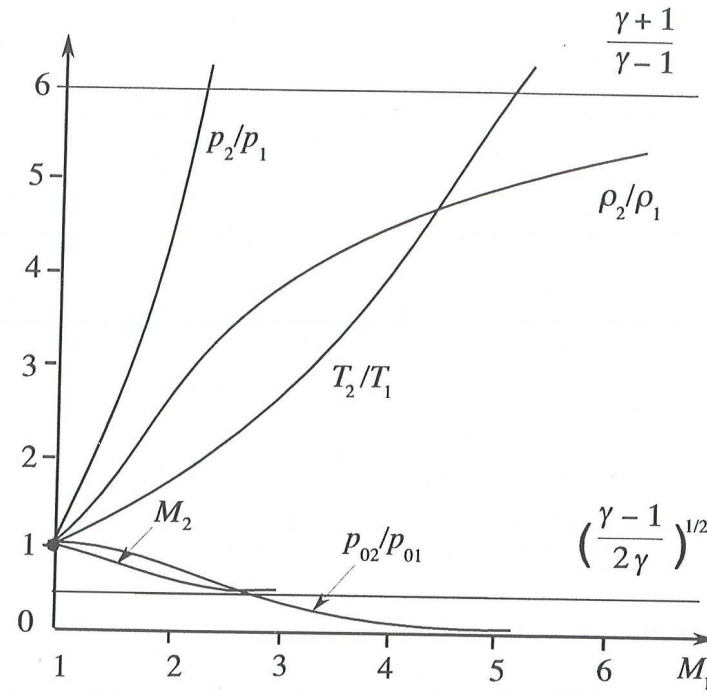
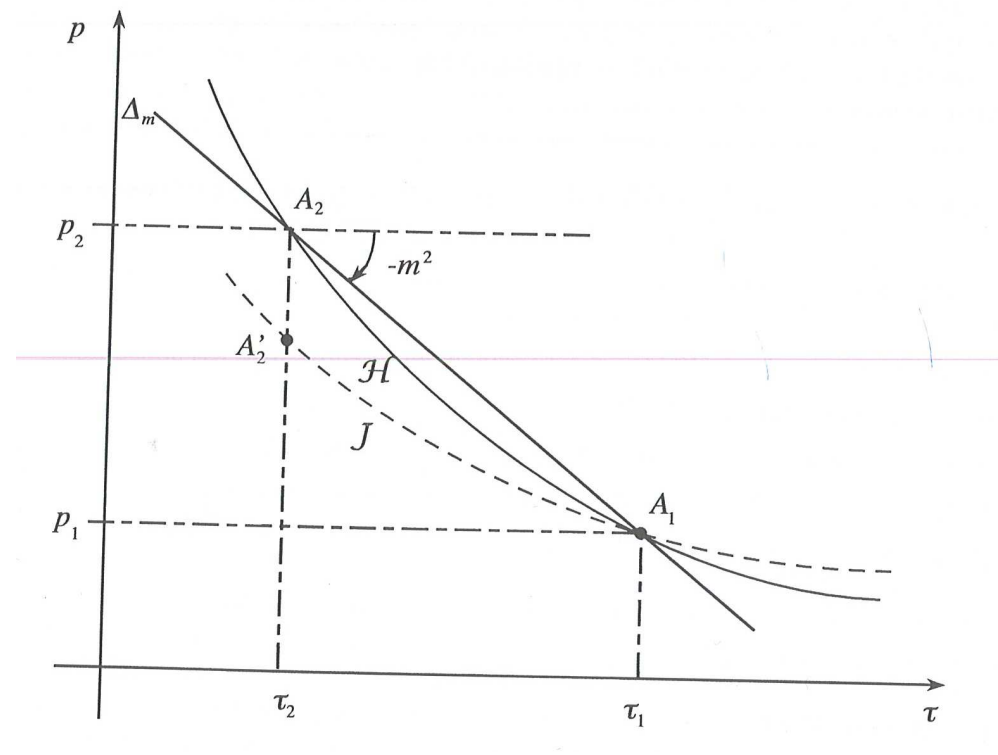


FIG. 5 : Variation de M_2 , p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 , T_2/T_1 et p_{02}/p_{01} pour $\gamma = 1,4$.

Démonstration graphique de la condition sur l'état amont



Droite de Rayleigh:

$$p_2 - p_1 = -m^2(\tau_2 - \tau_1), \quad \tau = 1/\rho, \quad p = p(\tau, s)$$

Courbe d'Hugoniot:

$$h(\tau_2, p_2) - h(\tau_1, p_1) = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1)$$

Hypothèses de Weyl

$$p = p(\tau, s), \quad \tau = 1/\rho$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_s < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\tau > 0$$

- $\mathcal{I}$ est concave. $\mathcal{H}$ est concave
- $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\tau > 0$: $\mathcal{I}$ est en dessous de $\mathcal{H}$ dans la zone autorisée par le second principe

Propriété cruciale

$$\left(\frac{dm^2}{ds_2}\right)_\mathcal{H} > 0 : \text{ sur la gauche de } A_1$$

Conséquence sur l'état amont et sur l'état aval

$$-\rho_1^2 v_1^2 = -m^2 < \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_s(A_1) = -\rho_1^2 c_1^2$$

PC 2

- Choc droit pour un gaz parfait
 - Résolution et application

AMPHI 3:

- Choc **OBLIQUE**
- Choc **COURBE**