

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

SEANCE 4

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Nature et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs obliques et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan.
Profils d’aile

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.1-5.4)

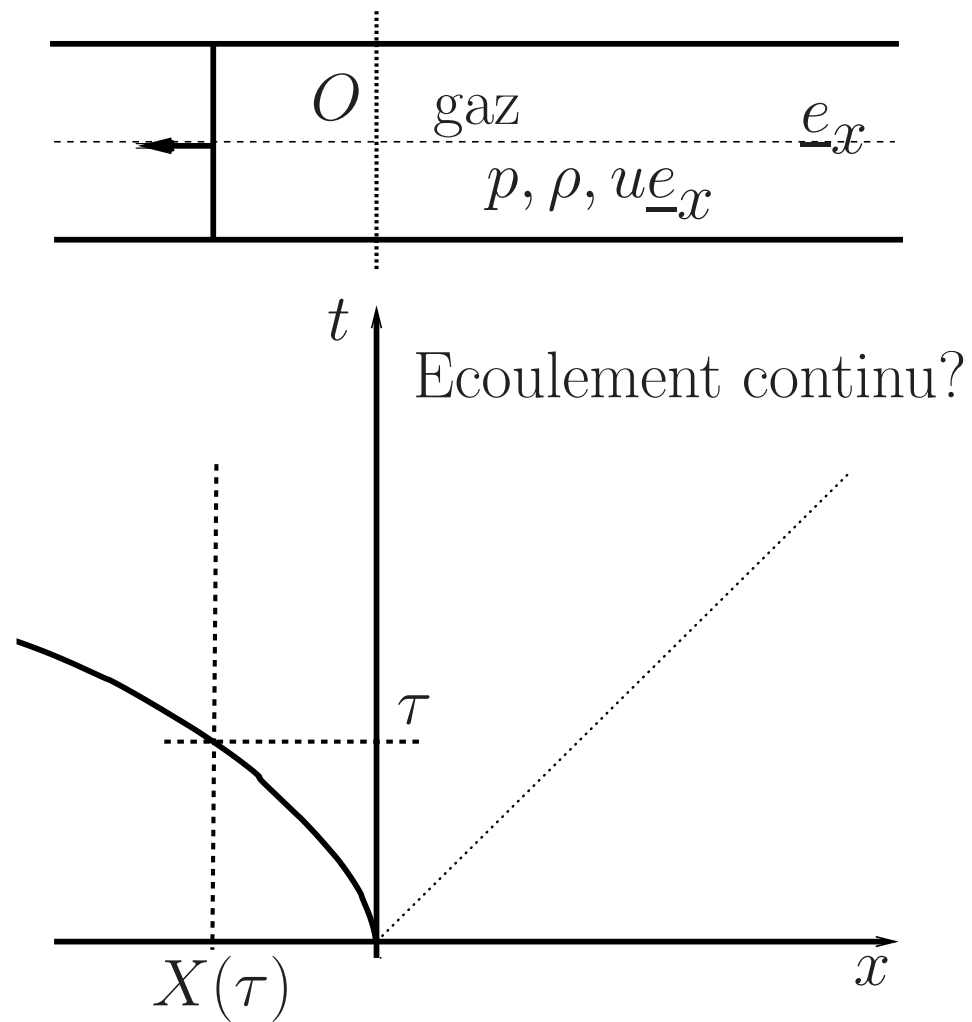
CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence

PROBLEME PROTOTYPE



$$p(x, t), \quad \rho(x, t), \quad \underline{U} = u(x, t)\underline{e}_x?$$

HYPOTHESES ET DONNEES

- Gaz parfait avec: $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = -p\underline{n}$, $\underline{F} = \underline{q} = \underline{0}$, $r_c = 0$
 - Hypothèses de Weyl ($\tau = 1/\rho$)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_s < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\tau > 0,$$

- Etat initial à $t = 0$: $\underline{U} = \underline{0}$, $p = p_o$, $\rho = \rho_o$ si $x > 0$
 - Trajectoire de la paroi $X(\tau)$

$$X(0) = 0, \quad X'(\tau) < 0, \quad X''(\tau) < 0 \quad (\tau \geq 0)$$

- Condition de glissement: $\underline{U}.\underline{n} = \underline{W}.\underline{n}$ à savoir

$$u[X(t), t] = X'(t), \quad t \geq 0$$

- Ecoulement CONTINU!

LES EQUATIONS D'EULER (régularité)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{U}) = 0 \quad (\text{Masse})$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p + \rho \underline{F} \quad (\text{Dynamique})$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (\text{Energie})$$

Lien important pour $p = p(\rho, s)$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = c^2(p, \rho) \frac{d\rho}{dt}, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s > 0$$

Cas de l'écoulement **unidimensionnel**

$$p(x, t), \quad \rho(x, t), \quad \underline{U} = u(x, t)\underline{e}_x, \quad \underline{F} = \underline{0}$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x}$$

Système différentiel (**non linéaire!**)

$$\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

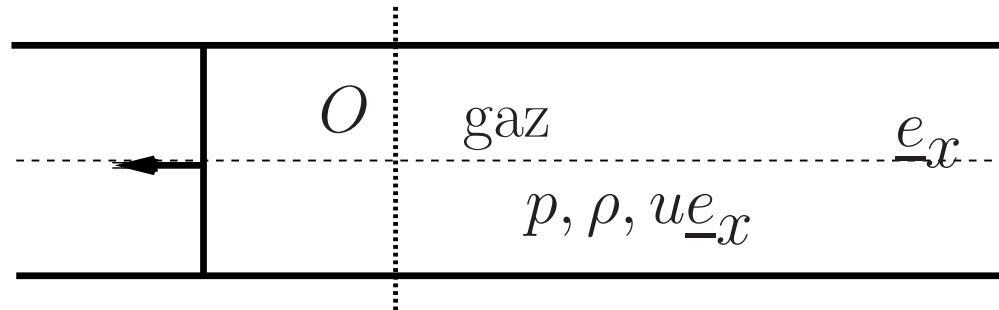
$$u \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

$$c = c(p, s) \quad \rho = \rho(p, s)$$

Cas de l'approximation acoustique

$$u, \quad p_o + p', \quad \rho_o + \rho', \quad s = s_o$$

$$\left| \frac{u}{c_o} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{p'}{p_o} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\rho'}{\rho_o} \right| \ll 1$$



$$c_o = c(p_o, \rho_o), \quad p_o + p' = p(\rho_o + \rho', s_o)$$

Linéarisation des équations

$$\rho_o c_o^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial t}, \quad \rho_o \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad p' = c_o^2 \rho'$$

$$\frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad f = p', \rho', u$$

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.1-5.4)

CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence

Courbes caractéristiques et relations de compatibilité

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial u}{\partial x}\right] &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (u - c)\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c)\frac{\partial u}{\partial x}\right] &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Interprétation

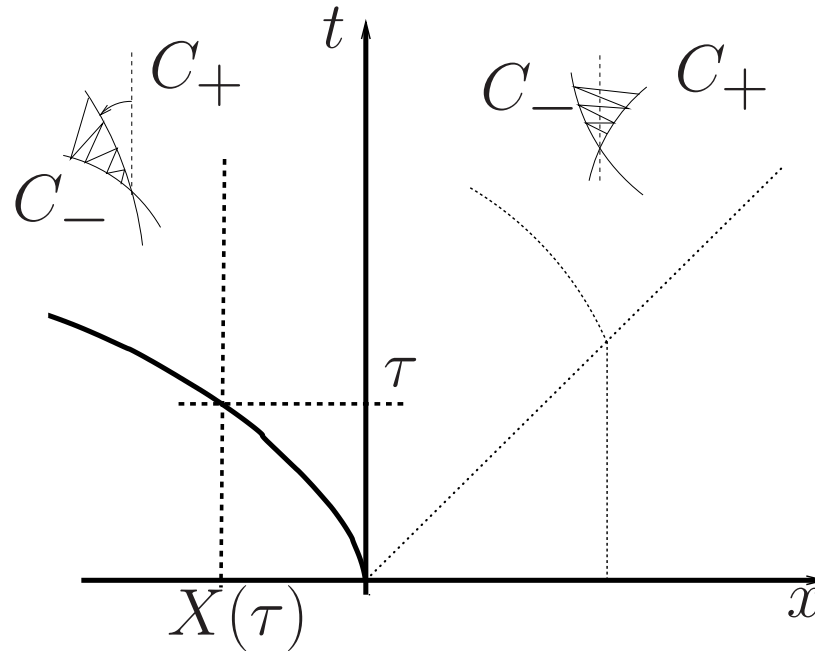
$$\frac{\delta g}{\delta t_{\underline{V}}} = \frac{\partial g}{\partial t} + \underline{\text{grad}}[g] \cdot \underline{V}$$

$$C_o : \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad ds_{C_o} = 0$$

$$C_+ : \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \quad dp_{C_+} + \rho c du_{C_+} = 0$$

$$C_- : \quad \frac{dx}{dt} = u - c, \quad dp_{C_-} - \rho c du_{C_-} = 0$$

Illustration dans le plan (x, t)



Nombre **local** de Mach $M = |u|/c$

- $M > 1$ écoulement supersonique
 - $M = 1$ écoulement sonique
- $M < 1$ écoulement subsonique

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.1-5.4)

CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence

Cas de l'écoulement **homoentropique**

$$s = s_o, \quad c = c(\rho), \quad dp = c^2 d\rho \quad (\text{partout!})$$

Invariants de Riemann

$$dp_{-}^{+} \rho c du = 0 \Rightarrow du_{-}^{+} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = 0$$

$$C_{+}^{-} : \quad u_{-}^{+} R(c) = J_{+}^{-}, \quad R(c) = \int_{\rho_o}^{\rho(c)} \frac{c(\rho')}{\rho'} d\rho'$$

Gaz parfait polytropique ($c^2 = \gamma r T$)

$$u_{-}^{+} \frac{2c}{\gamma - 1} = J_{+}^{-} \quad \text{sur} \quad C_{+}^{-}$$

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

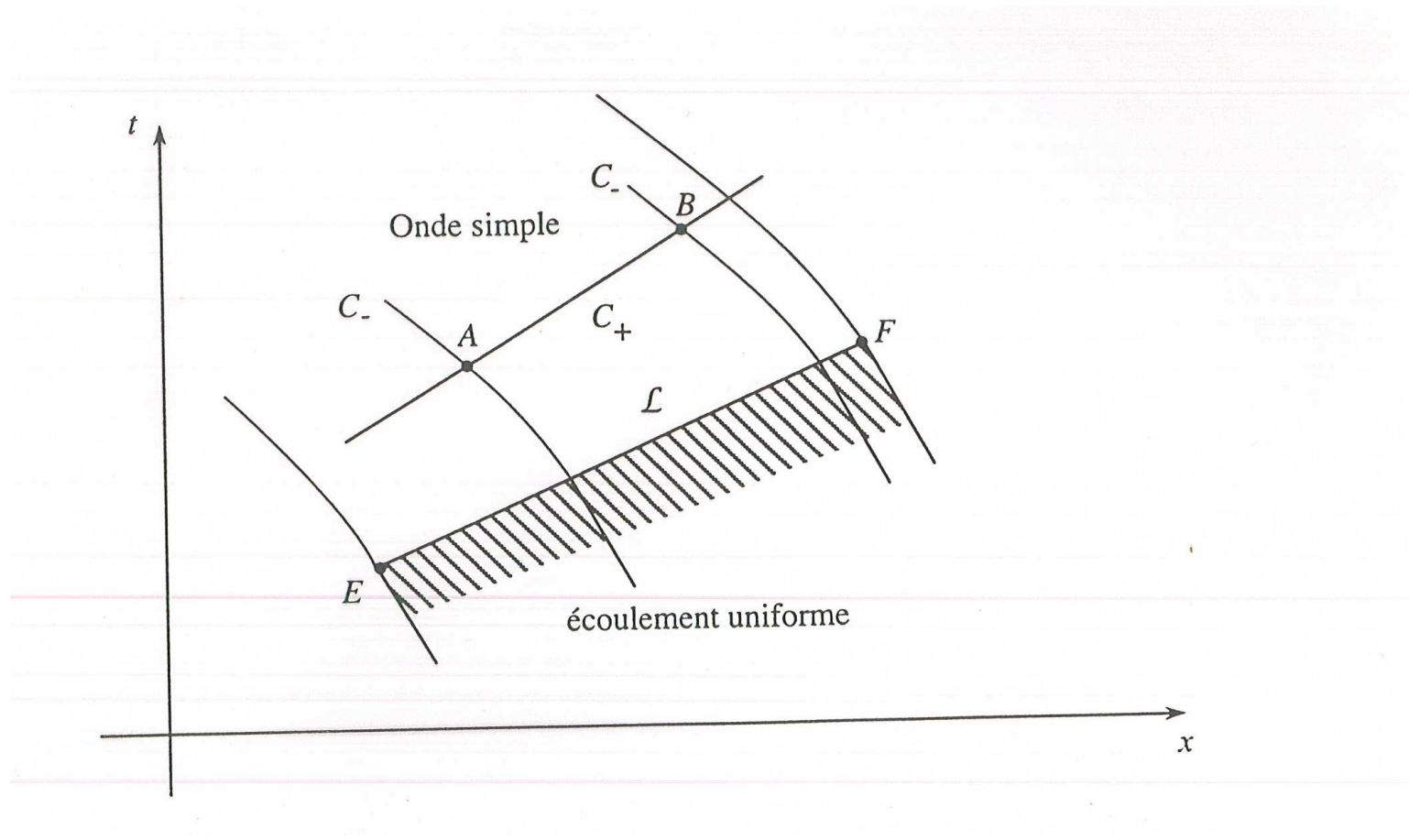
Chapitre 5 (5.1-5.4)

CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence



Onde simple: définition et propriétés

- Région du plan (x, t) jouxtant un écoulement uniforme
 - Frontière? C_+ ou C_- de l'écoulement uniforme
- Si une $C_+(C_-)$ est frontière les $C_+(C_-)$ dans l'onde simple sont rectilignes et l'écoulement uniforme sur ces $C_+(C_-)$

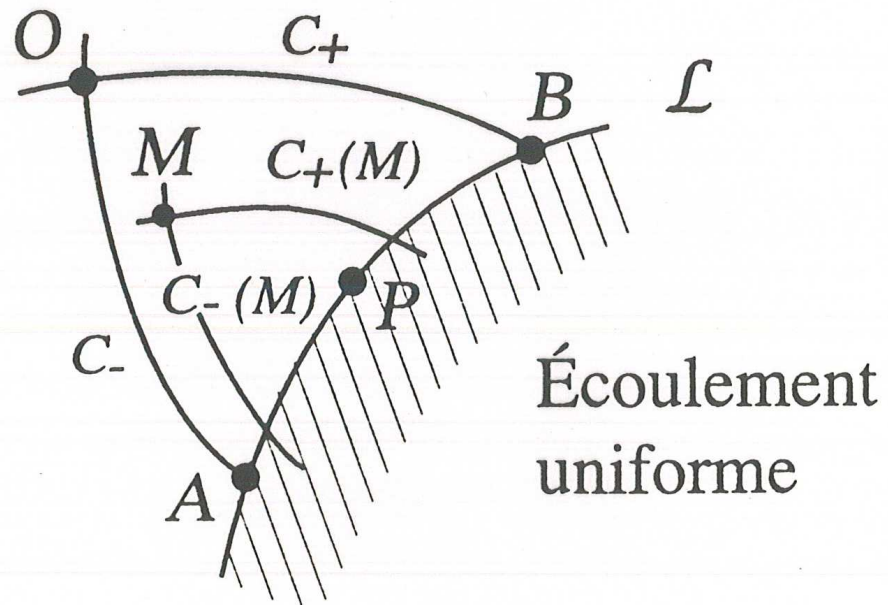
Démonstration

(u_o, p_o, ρ_o, c_o) uniforme $\Rightarrow$ homoentropique

Invariants de Riemann J_+ et J_- !

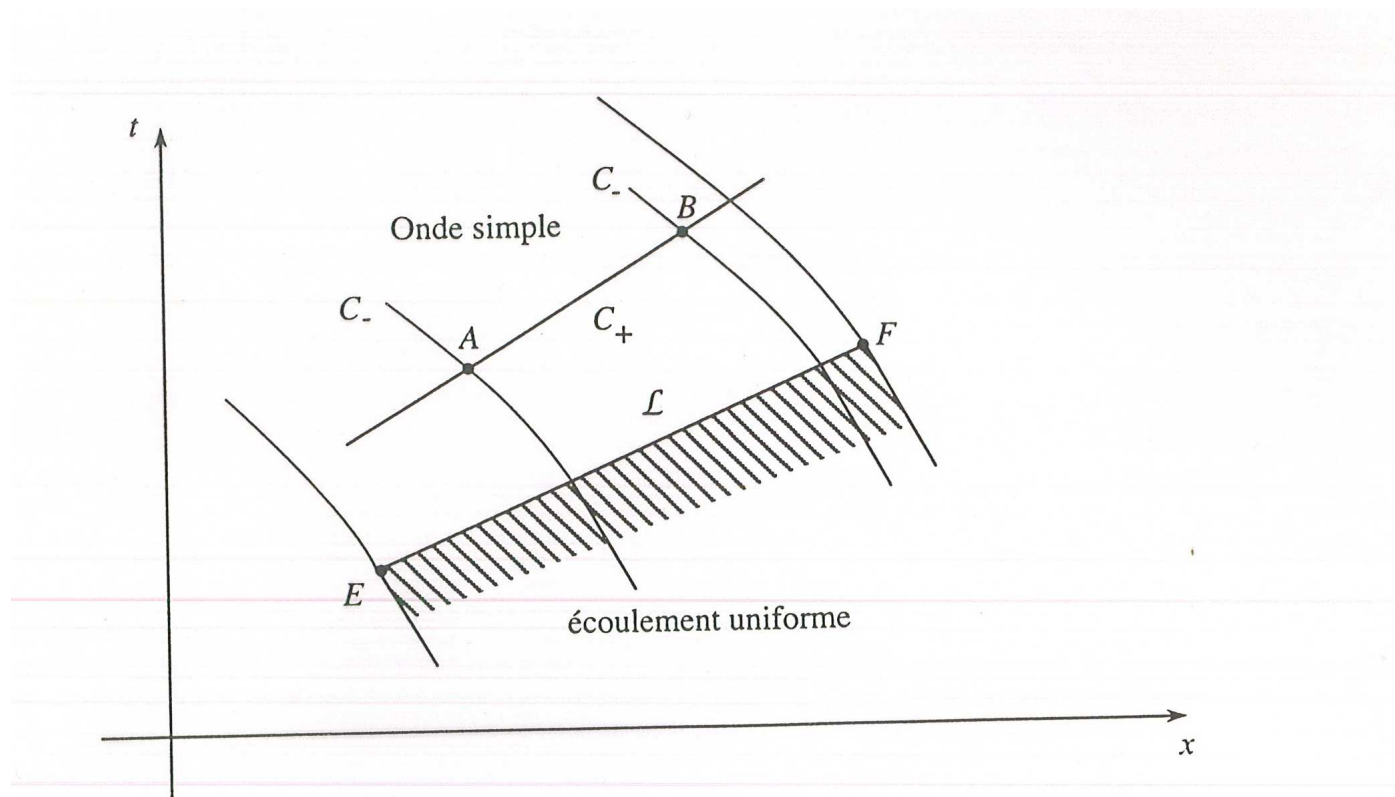
$$C_- : \quad u_A - R(c_A) = u_o - R(c_o) = u_B - R(c_B)$$

$$C_+ : \quad u_A + R(c_A) = u_B + R(c_B)$$



$$u_A - R(c_A) = u_O - R(c_O)$$

$$u_B + R(c_B) = u_O + R(c_O)$$



Onde simple: définition et propriétés

- Région du plan (x, t) jouxtant un écoulement uniforme
 - Frontière? C_+ ou C_- de l'écoulement uniforme
- Si une $C_+(C_-)$ est frontière les $C_+(C_-)$ dans l'onde simple sont rectilignes et l'écoulement uniforme sur ces $C_+(C_-)$

Démonstration

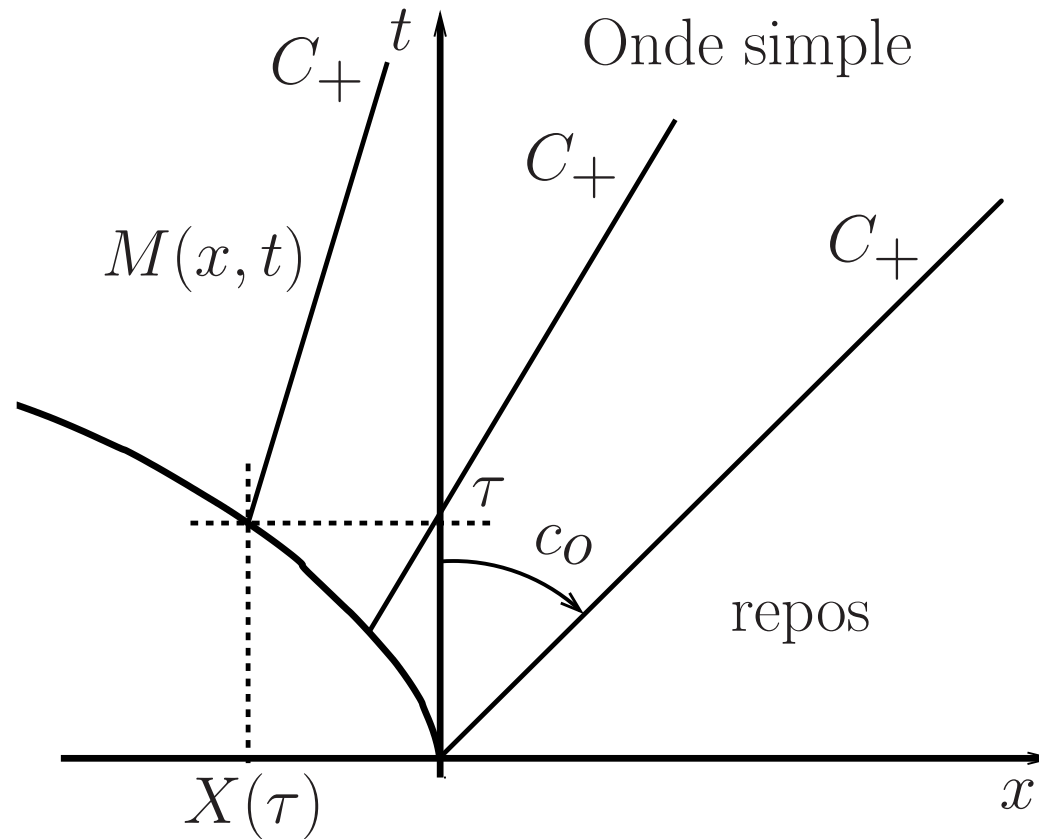
(u_o, p_o, ρ_o, c_o) uniforme $\Rightarrow$ homoentropique

Invariants de Riemann J_+ et J_- !

$$C_- : \quad u_A - R(c_A) = u_o - R(c_o) = u_B - R(c_B)$$

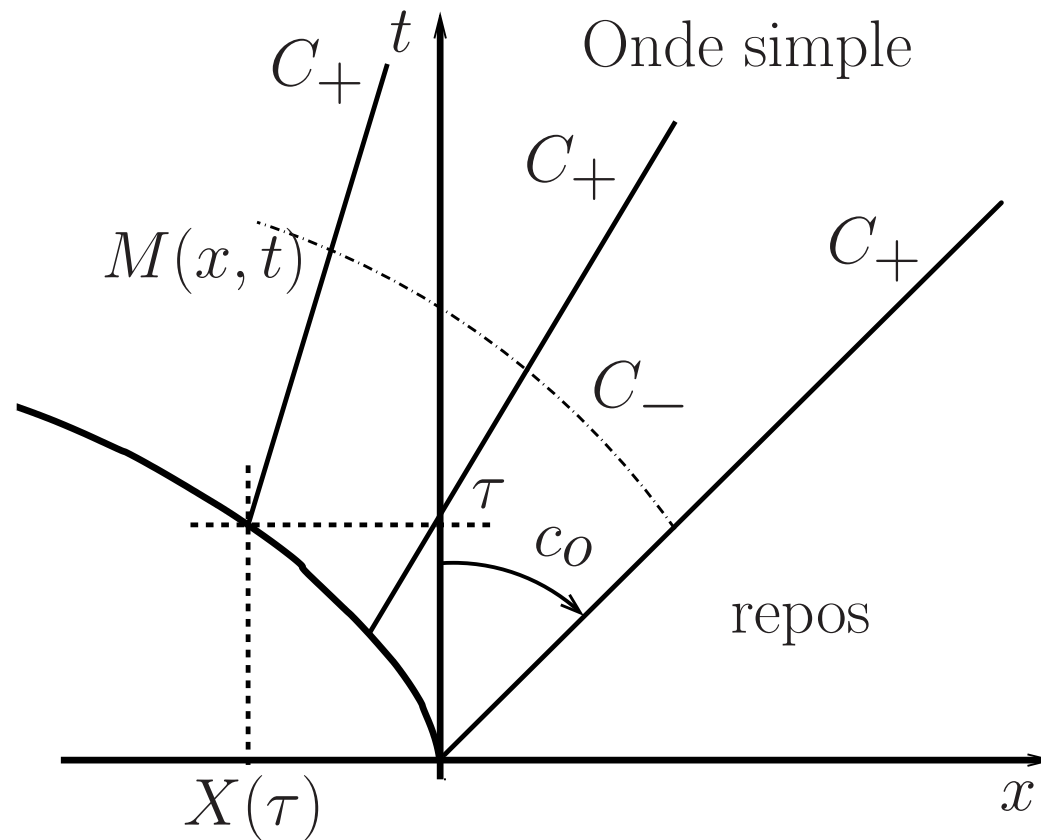
$$C_+ : \quad u_A + R(c_A) = u_B + R(c_B)$$

Résolution par Onde simple



Solution en $M(x, t)$ dans le fluide

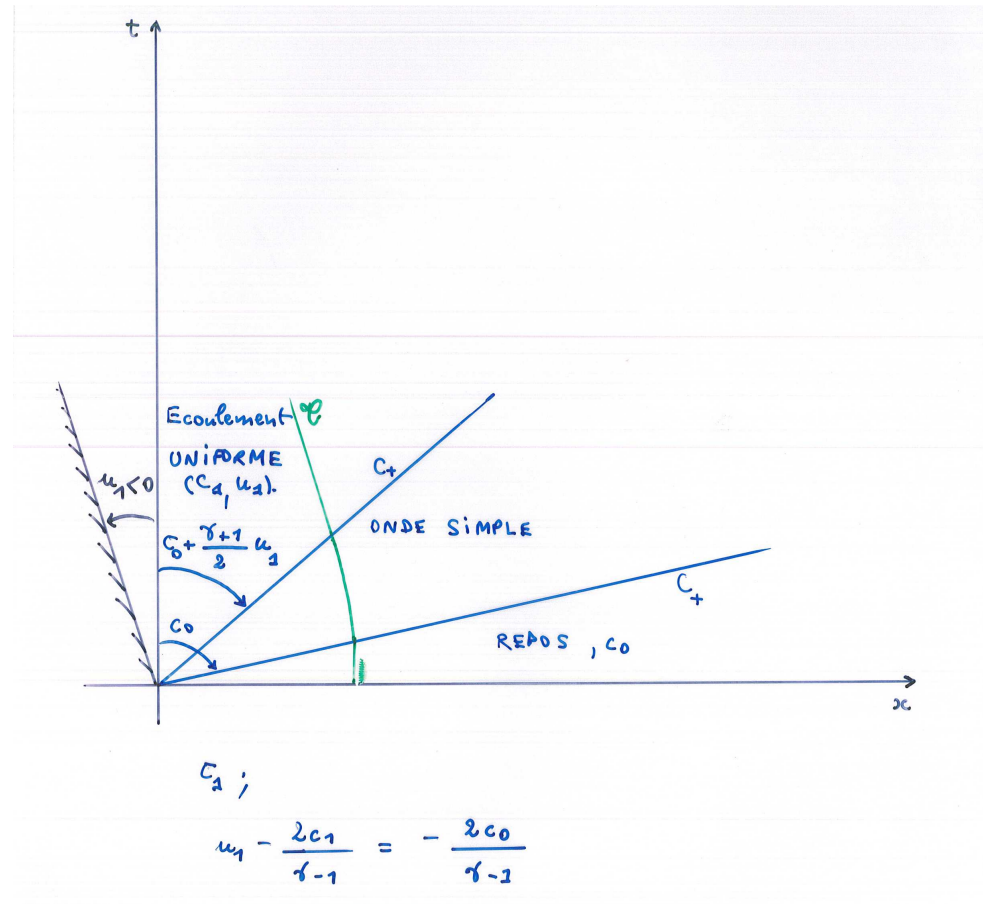
Pour $x \geq c_0 t$: **repos** (p_o, ρ_o)



Pour $X(t) \leq x \leq c_0 t$:

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}u, \quad p = p(c), \quad \rho = \rho(c)$$

$$u(x, t) = X'(\tau), \quad x = X(\tau) + [c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}X'(\tau)](t - \tau)$$



ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.1-5.4)

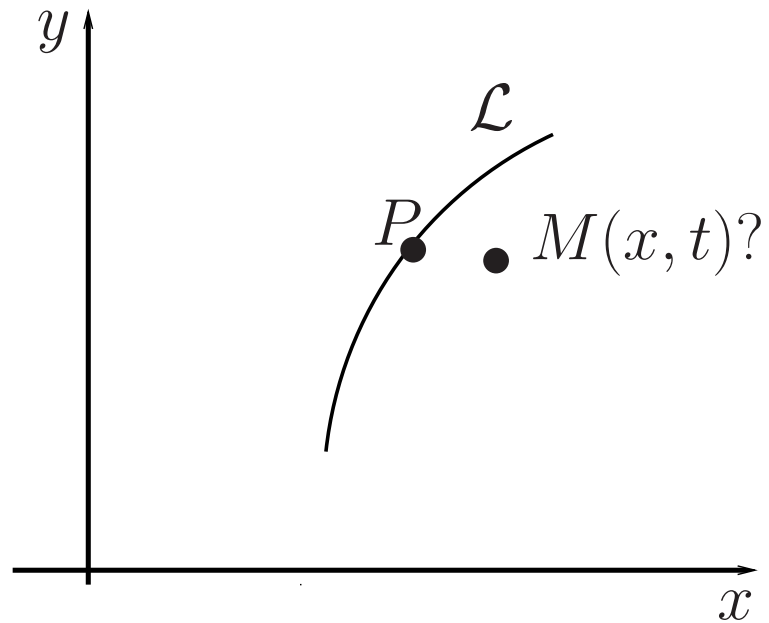
CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence

Problème de Cauchy



- Données: $\mathcal{L}$ et (u, v) sur $\mathcal{L}$
- Un système d'équations différentielles du premier ordre

$$A_1 u_{,x} + B_1 u_{,y} + C_1 v_{,x} + D_1 v_{,y} = E_1$$

$$A_2 u_{,x} + B_2 u_{,y} + C_2 v_{,x} + D_2 v_{,y} = E_2$$

Système d'équations différentielle completé

- Données: $\mathcal{L}$ et (u, v) sur $\mathcal{L}$

- Le système

$$A_1 u_{,x} + B_1 u_{,y} + C_1 v_{,x} + D_1 v_{,y} = E_1$$

$$A_2 u_{,x} + B_2 u_{,y} + C_2 v_{,x} + D_2 v_{,y} = E_2$$

$$u_{,x} + t(P)u_{,y} = \left[\frac{du}{dx}\right]_{\mathcal{L}}(P)$$

$$v_{,x} + t(P)v_{,y} = \left[\frac{dv}{dx}\right]_{\mathcal{L}}(P)$$

Avec

$$t(P) = \left(\frac{dy}{dx}\right)(P)$$

Discussion sur la valeur de la pente $t(P)$

$$\Delta[t(P)] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 1 & t(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t(P) \end{bmatrix}$$

- Si $\Delta[t(P)] \neq 0$: elliptique au point P
- Si $\Delta[t(P)] = 0$ admet une racine double réelle: parabolique au point P
 - Si $\Delta[t(P)] = 0$ admet 2 racines réelles distinctes $t_- < t_+$:
hyperbolique au point P

Relations de compatibilité?

- Existence de solutions **si** $\mathcal{L}$ et $(u, v)_{\mathcal{L}}$ vérifient

$$\mathcal{U}_P[t(P)]du_{\mathcal{L}} + \mathcal{V}_P[t(P)]dv_{\mathcal{L}} = \mathcal{W}_P[t(P)]dx$$

- Sinon: **pas de solution!**

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.1-5.4)

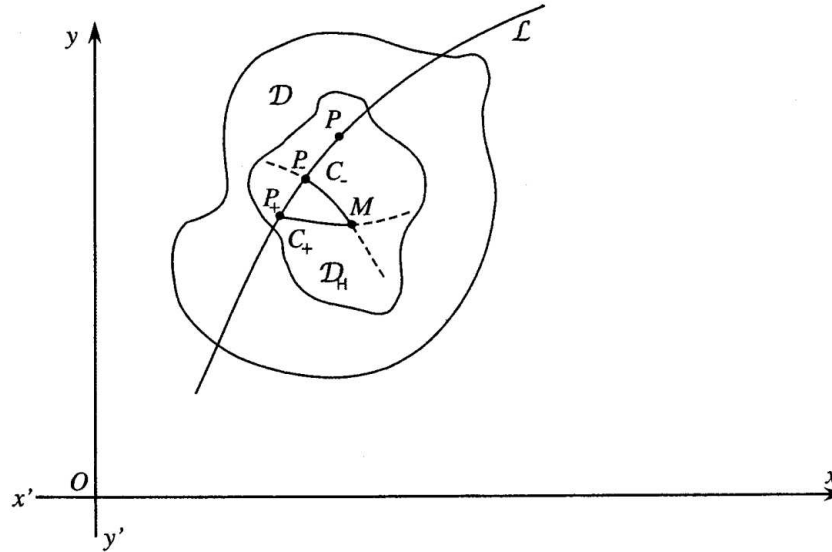
CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence

Construction de la solution en domaine hyperbolique



$$y_M - y_{P_-} = t_-(P_-)(x_M - x_{P_-})$$

$$y_M - y_{P_+} = t_+(P_+)(x_M - x_{P_+})$$

$$\mathcal{U}_{P_-}[t(P_-)](u_M - u_{P_-}) +$$

$$\mathcal{V}_{P_-}[t(P_-)](v_M - v_{P_-}) = \mathcal{W}[P_-](x_M - x_{P_-})$$

$$\mathcal{U}_{P_+}[t(P_+)](u_M - u_{P_+}) +$$

$$\mathcal{V}_{P_+}[t(P_+)](v_M - v_{P_+}) = \mathcal{W}[P_+](x_M - x_{P_+})$$

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

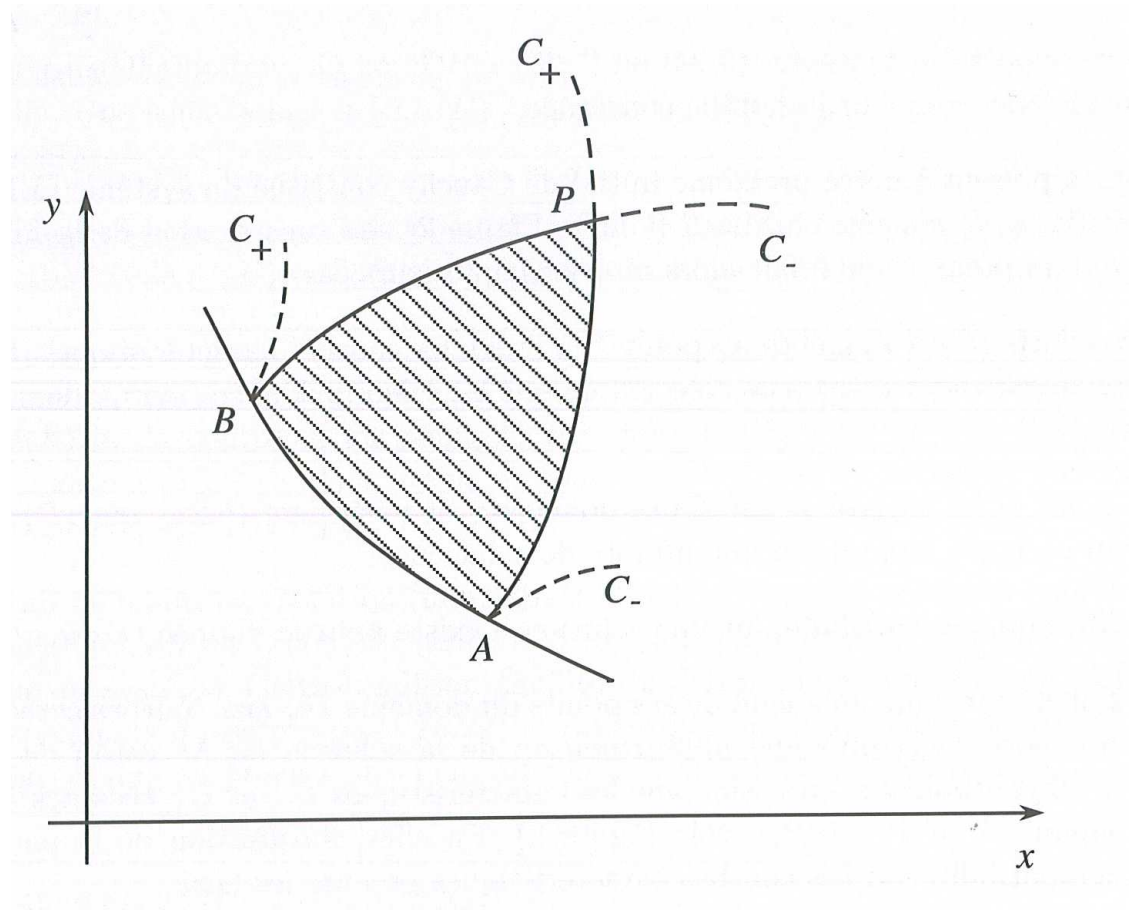
Chapitre 5 (5.1-5.4)

CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

- Problème prototype et hypothèses de travail. Equations d'Euler
 - Cas unidimensionnel. Courbes caractéristiques.
Relations de compatibilité
 - Écoulement homoentropique. Invariants de Riemann
- Onde simple: définition et propriétés. Résolution par onde simple

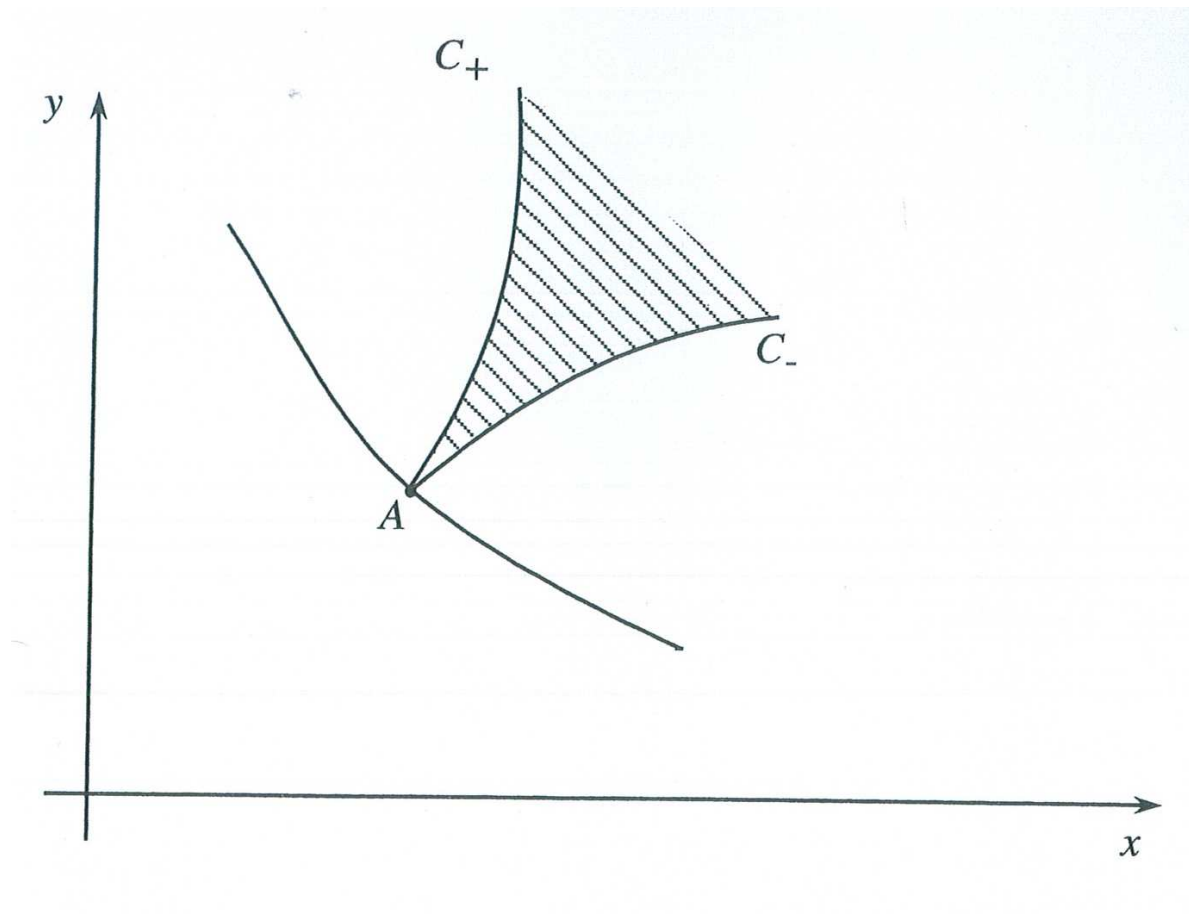
MÉTHODE GÉNÉRALE

- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité
- Construction de la solution en domaine hyperbolique
 - Domaines de dépendance et d'influence



0

Domaine de dépendance de l'arc AB



Domaine d'influence du point A

PC 4

- Onde simple de détente

AMPHI 5

- Ecoulement compressible instationnaire et unidimensionnel (suite)
 - Onde simple de compression
- Formation instationnaire d'un choc droit