

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

SEANCE 5

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Nature et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs obliques et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan.
Profils d’aile

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.5-5.6)

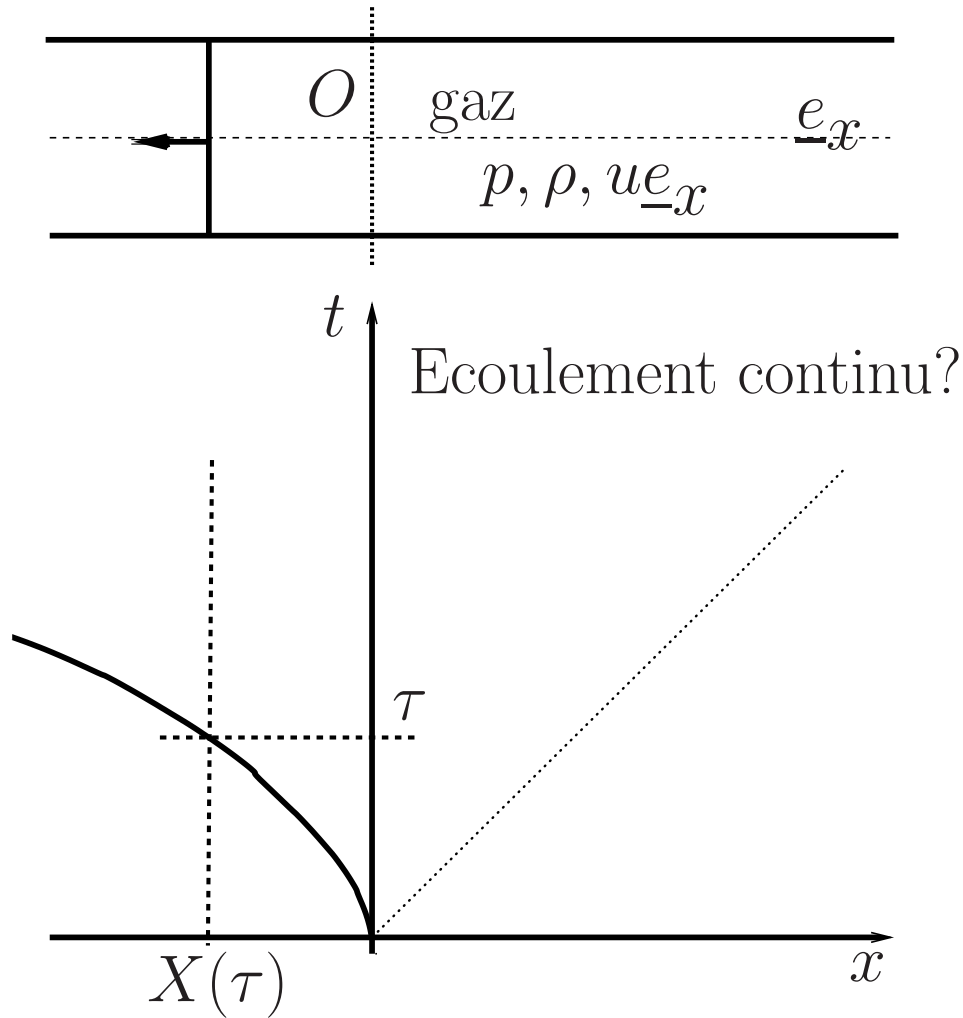
- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
- Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). Théorème de Crocco.
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

PROBLEME PROTOTYPE



$$p(x, t), \quad \rho(x, t), \quad \underline{U} = u(x, t)\underline{e}_x?$$

Rappels

- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

$$C_o : \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad ds_{C_o} = 0$$

$$C_{+} : \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \quad dp_{C_{+}} + \rho c du_{C_{+}} = 0$$

$$C_{-} : \quad \frac{dx}{dt} = u - c, \quad dp_{C_{-}} - \rho c du_{C_{-}} = 0$$

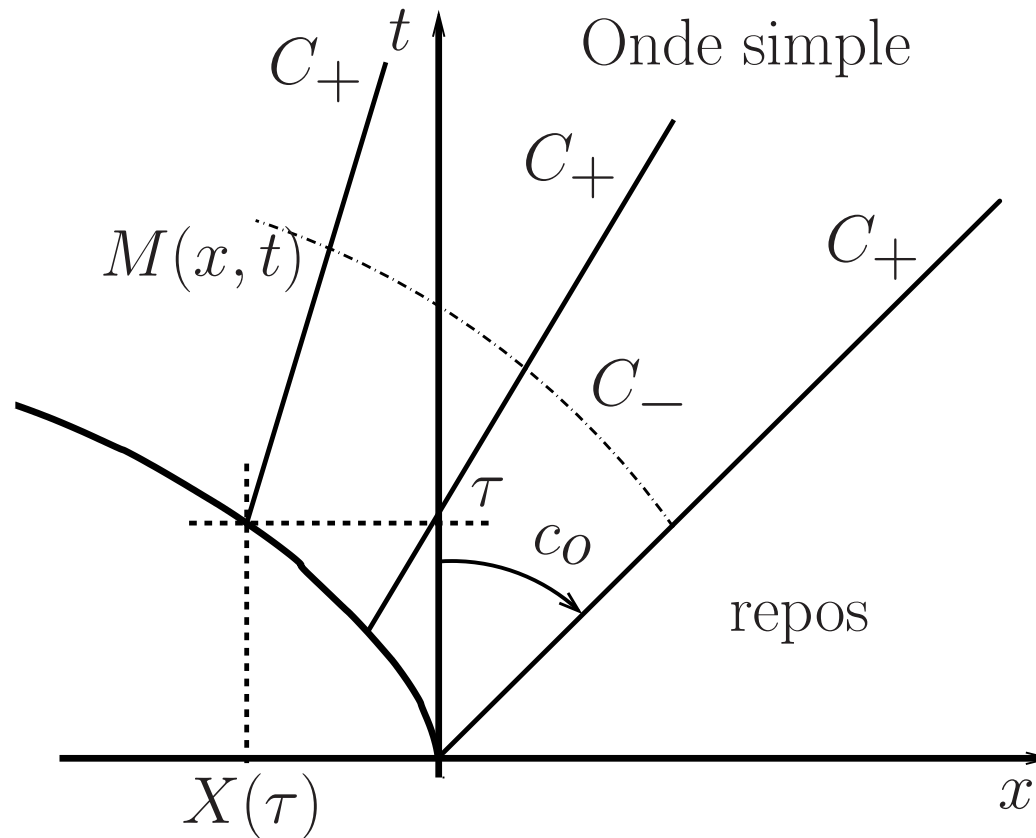
- Cas homoentropique: invariants de Riemann

$$C_{\pm} : \quad u_{\pm}^{\pm} R(c) = J_{\pm}, \quad R(c) = \int_{\rho_o}^{\rho(c)} \frac{c(\rho')}{\rho'} d\rho'$$

- Cas homoentropique: cas du gaz parfait polytropique

$$u_{-}^{+} \frac{2c}{\gamma - 1} = J_{+} \quad \text{sur} \quad C_{+}$$

Piston tiré: résolution par onde simple

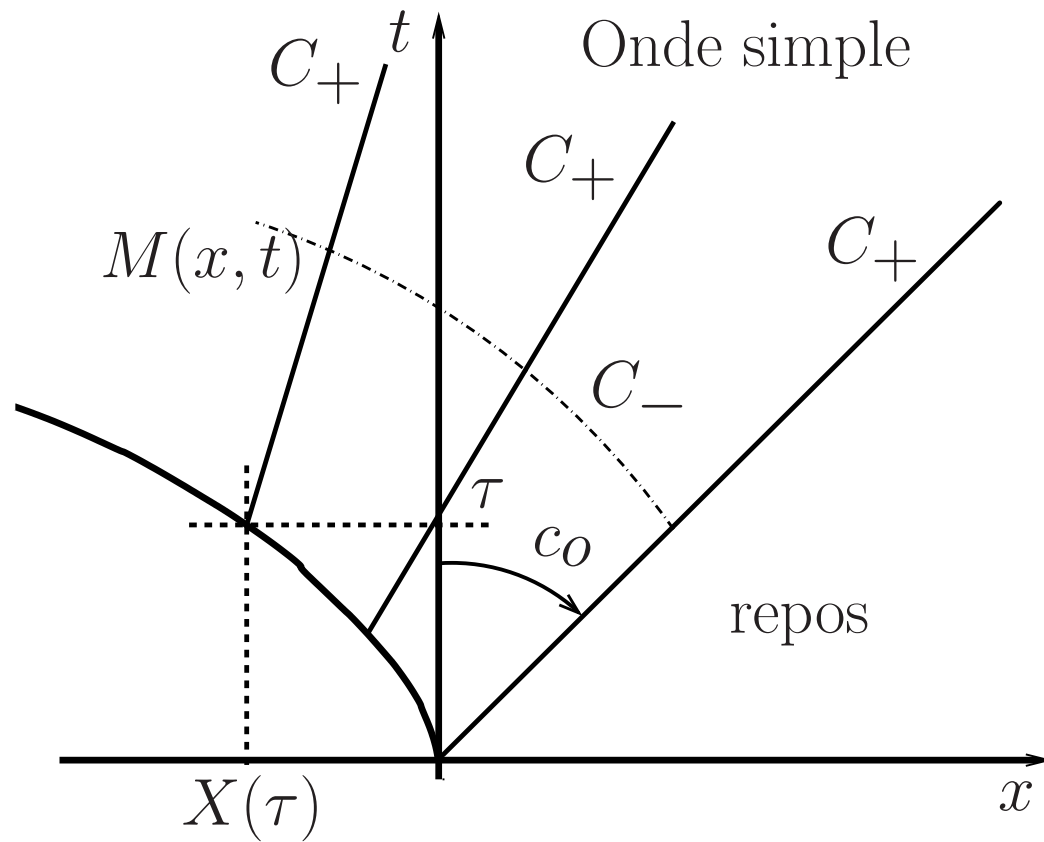


Pour $X(t) \leq x \leq c_o t$:

$$c = c_o + \frac{\gamma - 1}{2}u, \quad p = p(c), \quad \rho = \rho(c)$$

$$u(x, t) = X'(\tau), \quad x = X(\tau) + \left[c_o + \frac{\gamma + 1}{2}X'(\tau) \right] (t - \tau)$$

Remarques importantes



- saut des dérivées partielles sur la C_+ frontière!
- éventail "ouvert" des C_+

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.5-5.6)

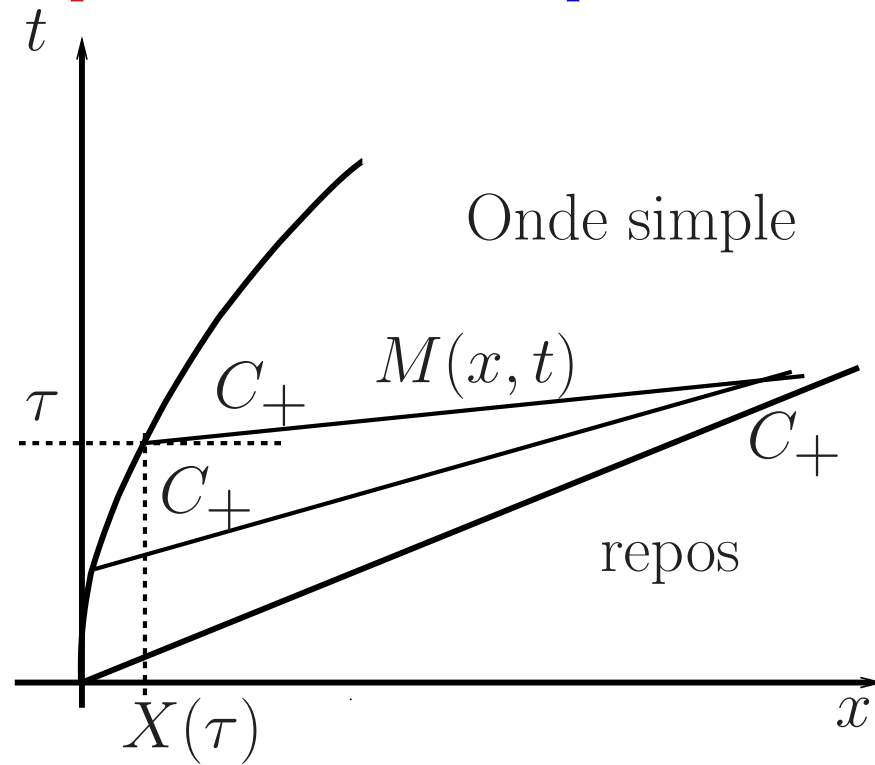
- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
 - Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). Théorème de Crocco.
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

Piston poussé: résolution par onde simple?



Pour $X(t) \leq x \leq c_o t$:

$$c = c_o + \frac{\gamma - 1}{2}u, \quad p = p(c), \quad \rho = \rho(c)$$

$$u(x, t) = X'(\tau), \quad x = X(\tau) + [c_o + \frac{\gamma + 1}{2}X'(\tau)](t - \tau)$$

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.5-5.6)

- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
 - Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

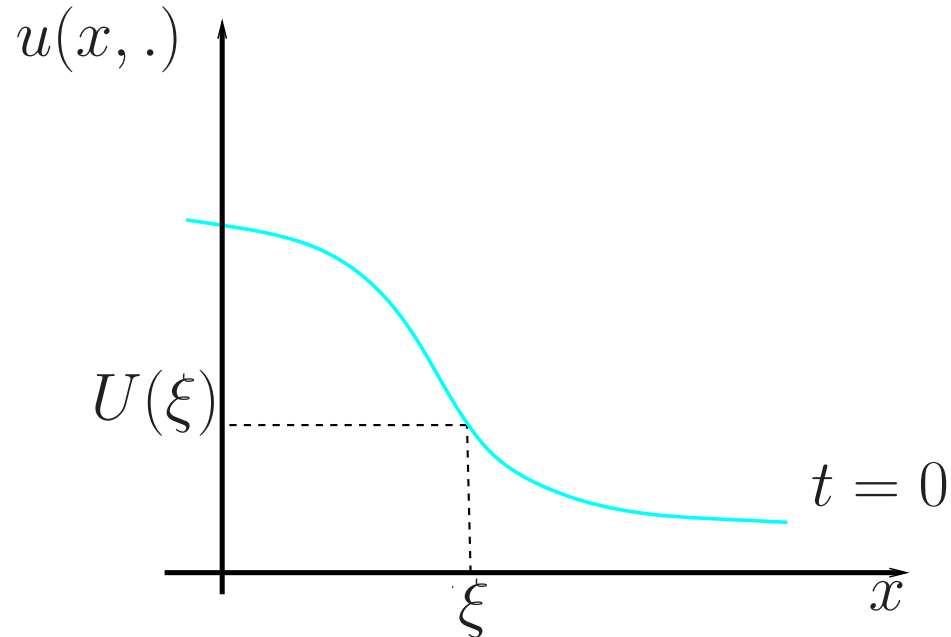
Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). Théorème de Crocco.
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

Onde simple de frontière de type C_+

$$(u, c) \text{ constant sur } \frac{dx}{dt} = u + c$$

$$u - R(c) = \text{cste partout: } c = c(u)$$

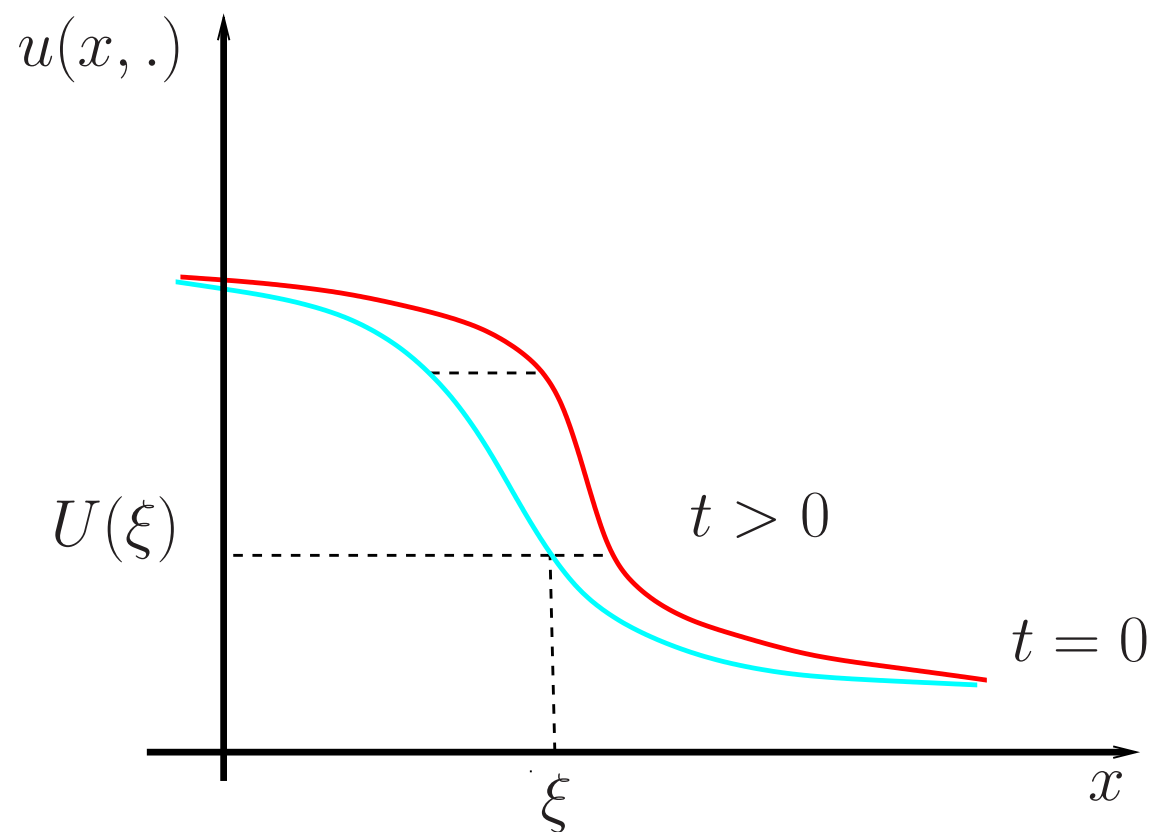


$$x = [u + c(u)]t + \xi, \quad u = U(\xi)$$

$$x = [u + c(u)]t + f(u), \quad f = U^{-1}$$

$u + c(u)$ fonction **croissante** de u !

Onde simple de frontière de type C_+

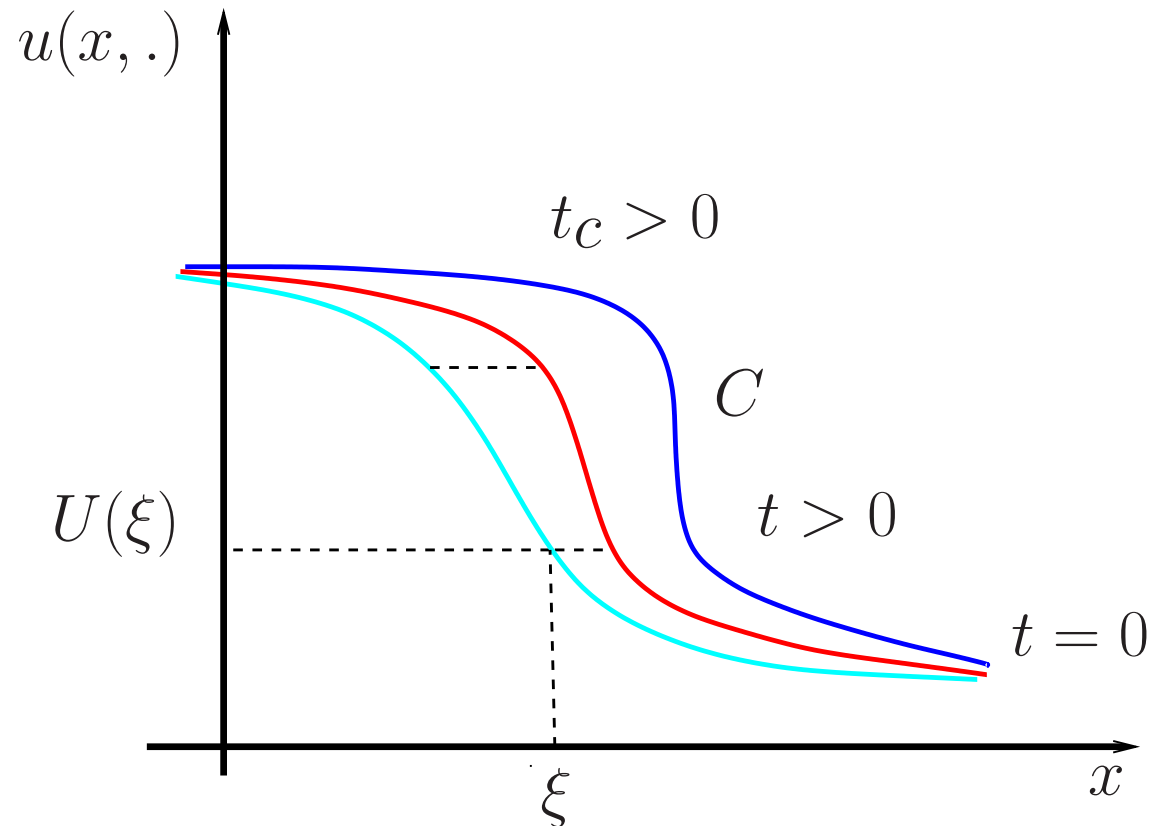


$$x = [u + c(u)]t + \xi, \quad u = U(\xi)$$

$$x = [u + c(u)]t + f(u), \quad f = U^{-1}$$

$u + c(u)$ fonction **croissante** de u !

Formation du choc: cas usuel

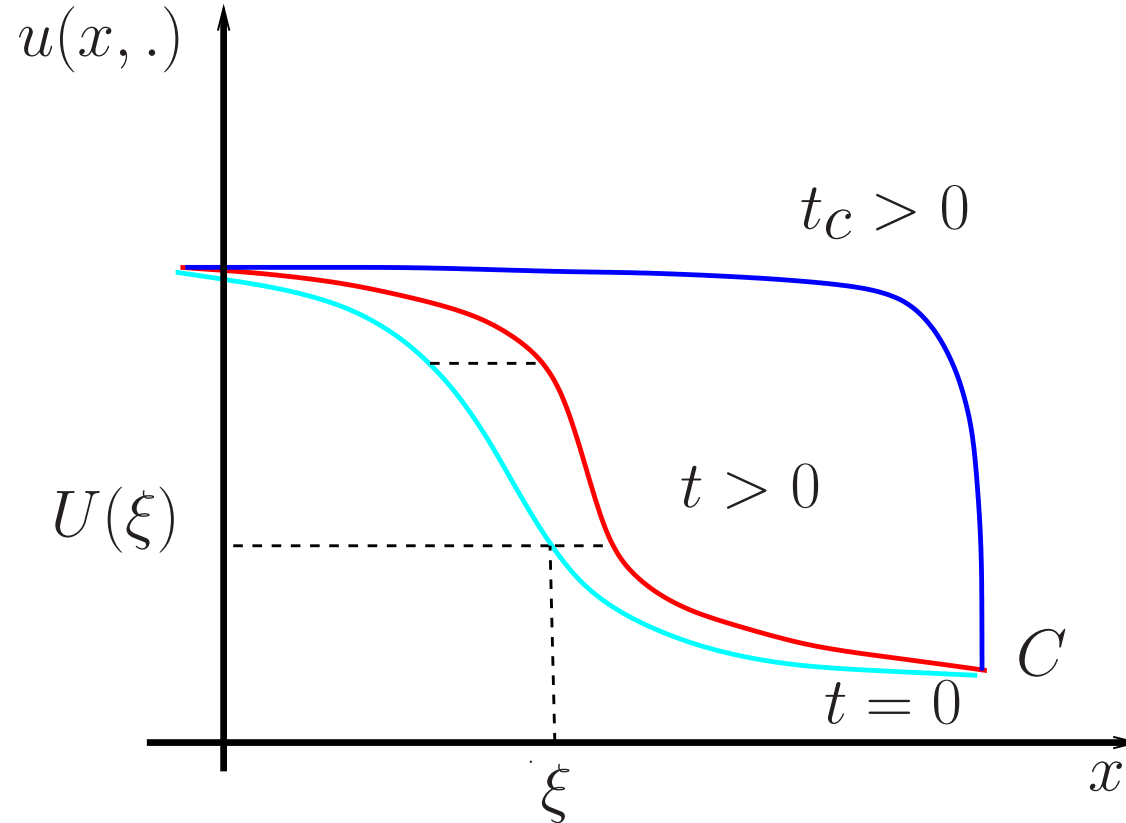


Relations au point $C(x_c, t_c)$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)(u_c, t_c) = [1 + c'(u_c)]t_c + f'(u_c) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)(u_c, t_c) = c''(u_c)t_c + f''(u_c) = 0$$

Formation du choc: cas exotique (condition en aval)



Relations au point $C(x_c, t_c)$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)(u_c, t_c) = [1 + c'(u_c)]t_c + f'(u_c) = 0$$

$$u_c = u_d \quad (\text{donnée en aval})$$

Application à l'Onde simple?

$$x = [u + c(u)]t + X(\tau) - [u + c(u)]\tau$$

Représentation **paramétrique** de f

$$f(u) = X(\tau) - [u + c(u)]\tau, \quad u = X'(\tau)$$

Gaz parfait polytropique ($p = \rho r T$)

$$c(u) = c_o + \frac{\gamma - 1}{2}u, \quad c'(u) = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad c''(u) = 0$$

Condition commune

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)(u_c, t_c) = \frac{\gamma + 1}{2}t_c + f'(u_c) = 0$$

$$\frac{\gamma + 1}{2}(t_c - \tau_c)X''(\tau_c) = c_o + \left[\frac{\gamma - 1}{2}\right]X'(\tau_c)$$

$$\tau_c \geq 0, \quad u_c = X'(\tau_c)$$

Condition supplémentaire?

Cas usuel (pas de condition en aval)

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)(u_c, t_c) = f''(u_c) = 0$$

$$X'''(\tau_c)\left[c_o + \frac{\gamma - 1}{2}X'(\tau_c)\right] - \gamma X''^2(\tau_c) = 0$$

$$\tau_c > 0, \quad u_c = X'(\tau_c)$$

Cas exotique (condition en aval)

$$u_c = u_d \text{ (ici } = 0), \quad \tau_c = 0, \quad t_c = \frac{2c_o}{(\gamma + 1)X''(0)}$$

Le point $C(x_c, t_c)$ est déterminé!

- $t < t_c$: écoulement CONTINU
- $t \geq t_c$: DISCONTINUITES!, CHOC DROIT INSTATIONNAIRE!

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.5-5.6)

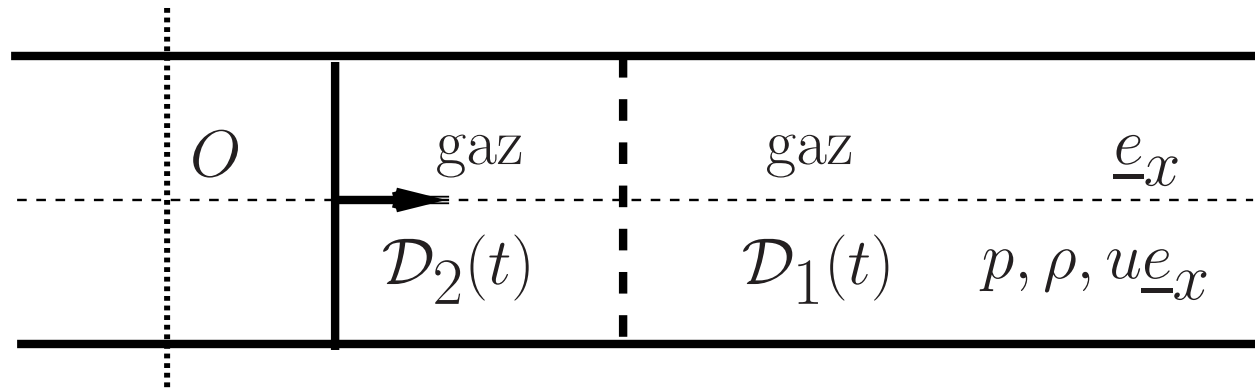
- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
 - Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). Théorème de Crocco.
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

Cas du piston poussé: Modélisation pour $t \geq t_c$?



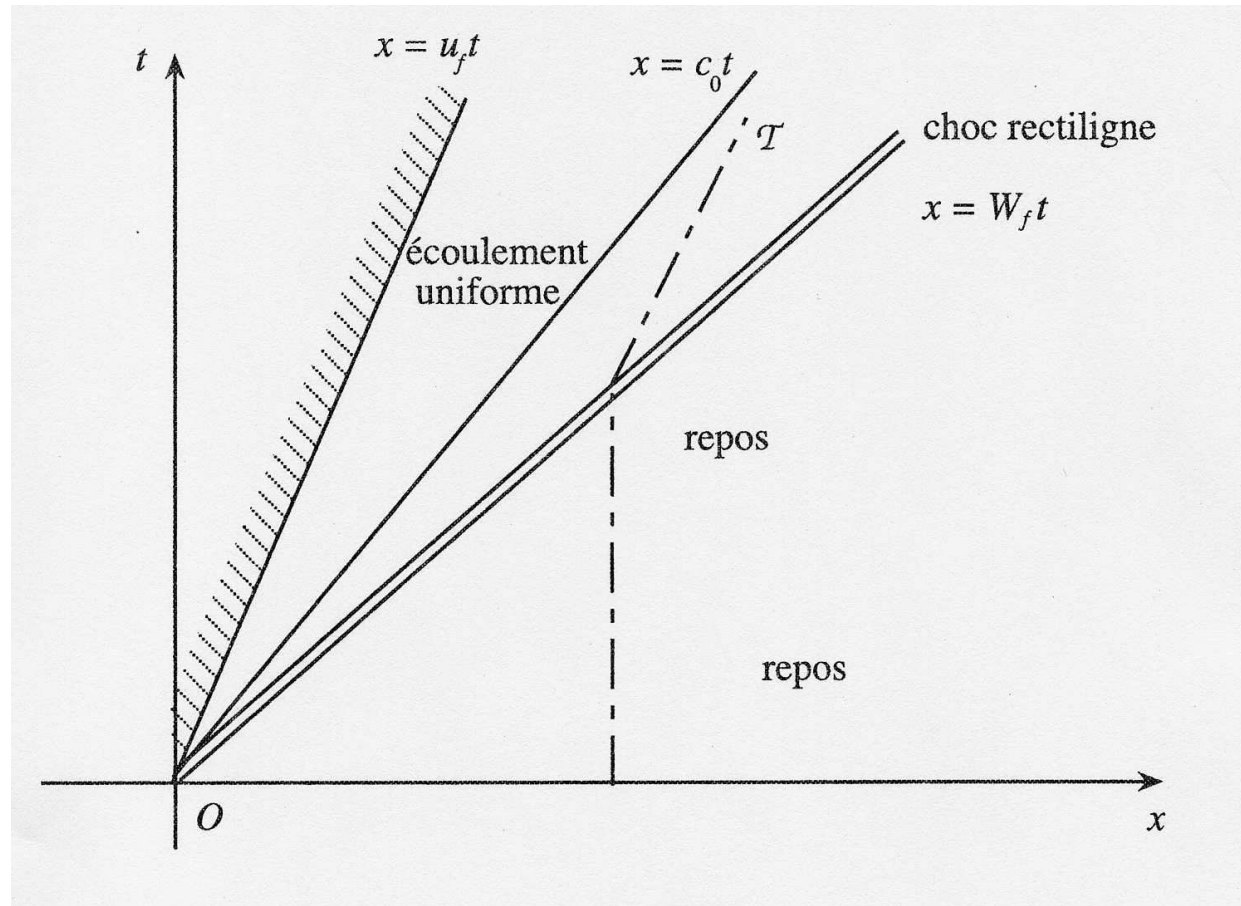
Choc droit **mobile**!

- état 1=état amont, vitesse $\underline{u}_1 = \underline{0}$ et $c_1 = c_0$
- Choc mobile de vitesse $\underline{W} = v_c \underline{e}_x$ avec $v_c > 0$
 - Condition d'existence (second principe!)

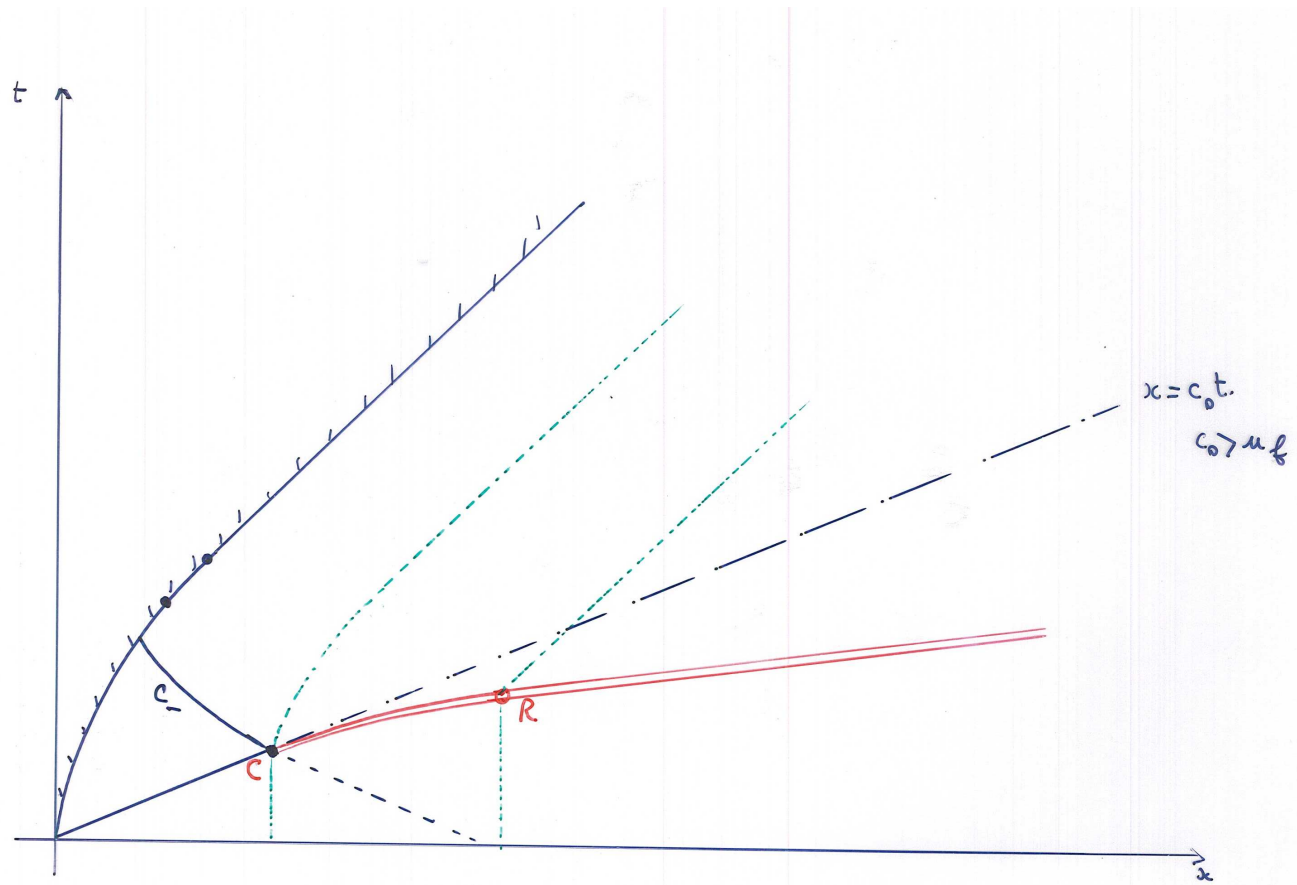
$$M_1 = |\underline{u}_1 - \underline{W}|/c_1 > 1$$

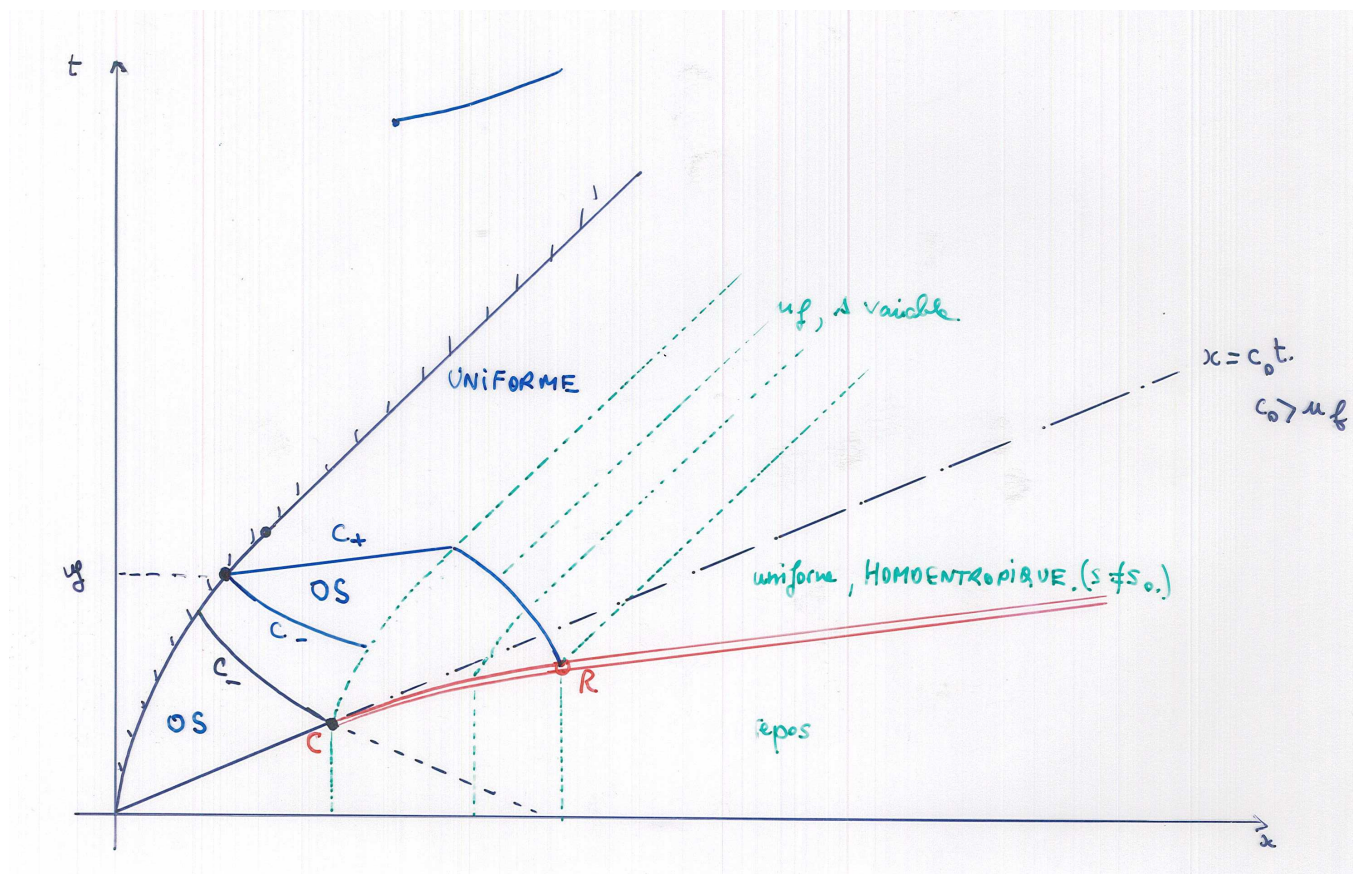
- $v_c > c_0$

Modélisation limite pour un piston à vitesse uniforme?



Écoulement [homoénergétique](#) et [homoentropique](#) avant et après le choc mais pas dans tout le domaine!





ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

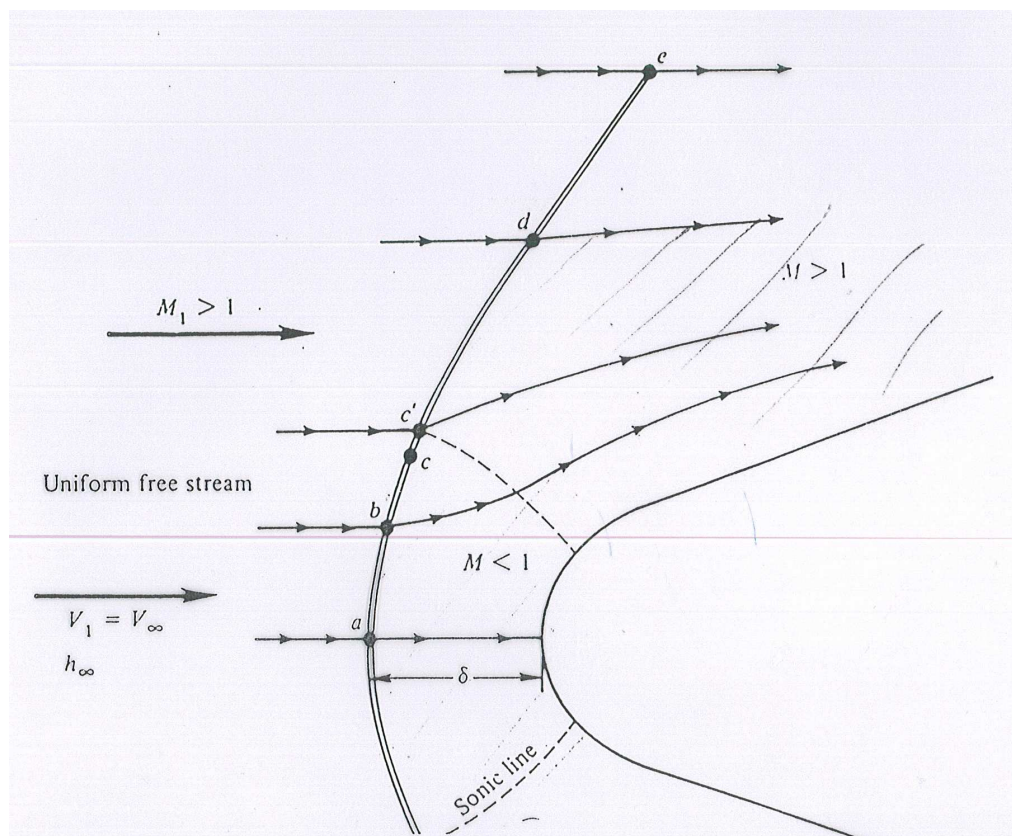
Chapitre 5 (5.5-5.6)

- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
 - Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). Théorème de Crocco.
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité



LES EQUATIONS D'EULER (régularité)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{U}) = 0 \quad (\text{Masse})$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad} p} \quad (\text{Dynamique})$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \quad (\text{Energie})$$

$$H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

Ecoulement isentropique et isoénergétique

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \quad \frac{dp}{dt} + \rho c^2 \operatorname{div}(\underline{U}) = 0$$

4 (2D) ou 5 (3D) inconnues: $\underline{U}, p, \rho$ ou s

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.5-5.6)

- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
 - Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). **Théorème de Crocco.**
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

Loi de la dynamique en écoulement permanent

$$\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}\left[\frac{U^2}{2}\right]$$

$$\underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}\left[\frac{U^2}{2}\right] + \frac{1}{\rho}\underline{\text{grad}}p = \underline{0}$$

Relation thermodynamique

$$h = h(p, \rho), \quad \underline{\text{grad}}[h] = T\underline{\text{grad}}[s] + \frac{1}{\rho}\underline{\text{grad}}[p]$$

Théorème de Crocco en écoulement permanent

$$\underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}\left[h + \frac{U^2}{2}\right] = T\underline{\text{grad}}[s]$$

Conséquences dans tout domaine de régularité

$$\underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}[h + \frac{U^2}{2}] = T \underline{\text{grad}}[s]$$

montre que

- $3D$: $\underline{\text{rot}}(\underline{U}).\underline{U} \neq 0$

potentiel et {homoénergétique ou
homoentropique} $\rightarrow$ homoentropique
ou homoénergétique

- $2D$ ou $3D$ axisymétrique **sans vitesse orthoradiale**: $\underline{\text{rot}}(\underline{U}).\underline{U} = 0$

2 parmi {potentiel, homoénergétique, homoentropique} $\rightarrow$ la troisième

Conséquences si choc stationnaire avec écoulement amont uniforme permanent

- Etat aval pour choc oblique permanent?
 1. homoénergétique ($H_{\text{amont}} = H_{\text{aval}}$)
 2. homoentropique ($s_2 \neq s_1$)
 3. potentiel ϕ : simplification!
- Etat aval pour choc courbe permanent?
 1. homoénergétique ($H_{\text{amont}} = H_{\text{aval}}$)
 2. seulement isentropique donc non potentiel!

Production de rotationnel à la traversée d'un choc courbe
(cours pages 68-69; chapitre 4)

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE UNIDIMENSIONNEL ET INSTATIONNAIRE

Chapitre 5 (5.5-5.6)

- Problème prototype. Rappels. Cas du piston tiré
- Cas du piston poussé. Onde simple de compression
 - Formation instationnaire d'un choc mobile
 - Instant et lieu d'apparition du choc instationnaire
- Modélisation dans le plan (x, t) et propriétés remarquables de l'écoulement

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6 (6.1-6.2)

- Motivations
- Equations d'Euler (rappel). Théorème de Crocco.
 - Le système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques. Relations de compatibilité

Notations et inconnues

$$\underline{U} = (U, \theta) = (u, v), \quad (u, v, p, s)$$

Système quasi-linéaire (homogène)

$$(u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial v}{\partial x} + (v^2 - c^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \quad \underline{\text{grad}}[a] \cdot \underline{U} = 0, \quad a = s, H$$

Avec les relations

$$c = c(p, s), \quad \rho = \rho(p, s)$$

Courbes caractéristiques? Les trajectoires C_o

$$ds_{C_o} = 0, \quad dH_{C_o} = 0 \rightarrow \rho U dU_{C_o} + dp_{C_o} = 0$$

Méthode des caractéristiques

$$(u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial v}{\partial x} + (v^2 - c^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a(P) \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{du}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + a(P) \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + a(P) \frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{dp}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

pente et équations d'état

$$a(P) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mathcal{L}}(P), \quad c = c(p, s), \quad \rho = \rho(p, s)$$

Recherche des courbes caractéristiques

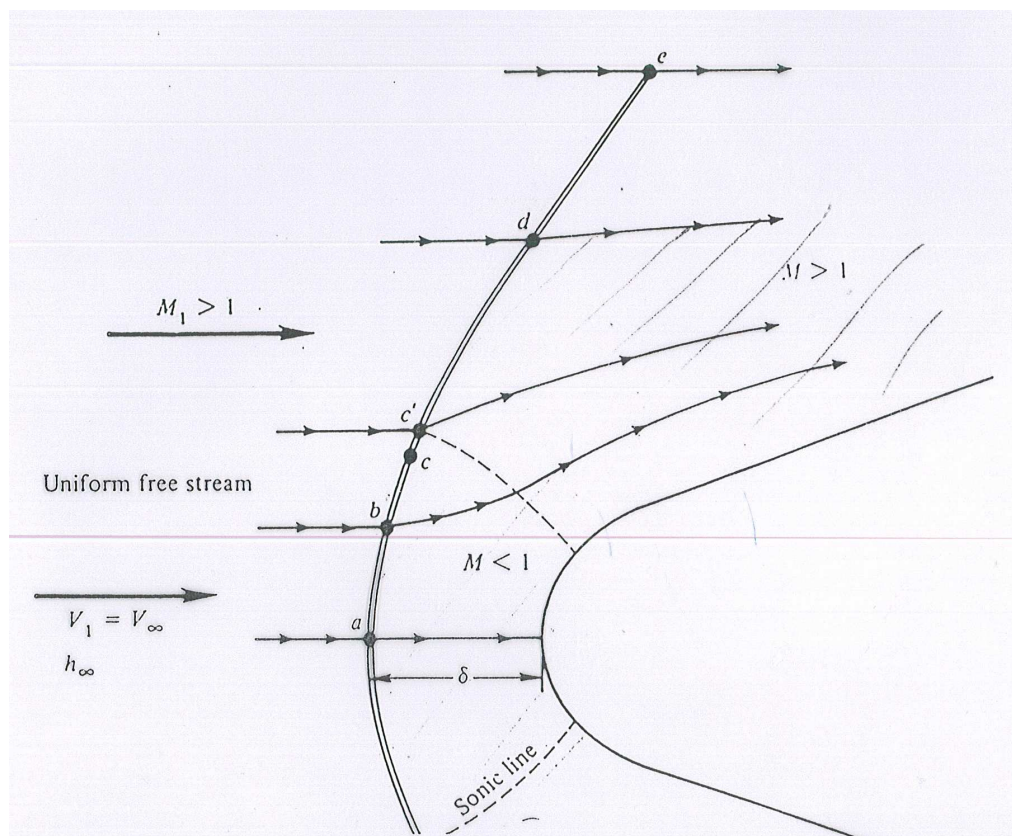
- Choix de $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ tel que $\underline{U}(P) = u(P)\underline{e}_x$

Résultats (détails dans le polycopié)

- Système Hyperbolique (condition) **si $M(P) > 1$!**
 - angle de Mach: $\alpha(M) = \arcsin[1/M]$
 - $a(P) = 0$: trajectoire
 - deux autres famille de courbes C_- et C_+ :
 $a_-(P) = -\tan[\alpha(P)], \quad a_+(P) = \tan[\alpha(P)]$

A retenir

- Hyperpolique **conditionnel et local** pour $M > 1$
 - Si $M > 1$ en M alors deux familles C_- et C_+ au voisinage du point M



Relations de compatibilité associées?

Si $M > 1$

$$C_o : dp_{C_o} + \rho U dU_{C_o} = 0, \quad (ds_{C_o} = 0)$$

$$C_- : d\theta_{C_-} - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} dp_{C_-} = 0$$

$$C_+ : d\theta_{C_+} + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} dp_{C_+} = 0$$

Invariants de Riemann?

- s et H sur chaque trajectoire C_0 pour tout M !
 - Sur les C_- et C_+ pour $M > 1$?
Voir prochain Amphi!

PC5

- Tube à choc de section constante
 - Tube à choc évasé

DM

- Enoncé sur Moodle ce soir
- A rendre le vendredi 7 novembre en fin de journée

AMPHI 6

- Ecoulement compressible, plan et permanent (suite)
 - Onde simple, détente de Prandtl-Meyer