

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

SEANCE 6

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Nature et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs obliques et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan.
Profils d’aile

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6

Rappels

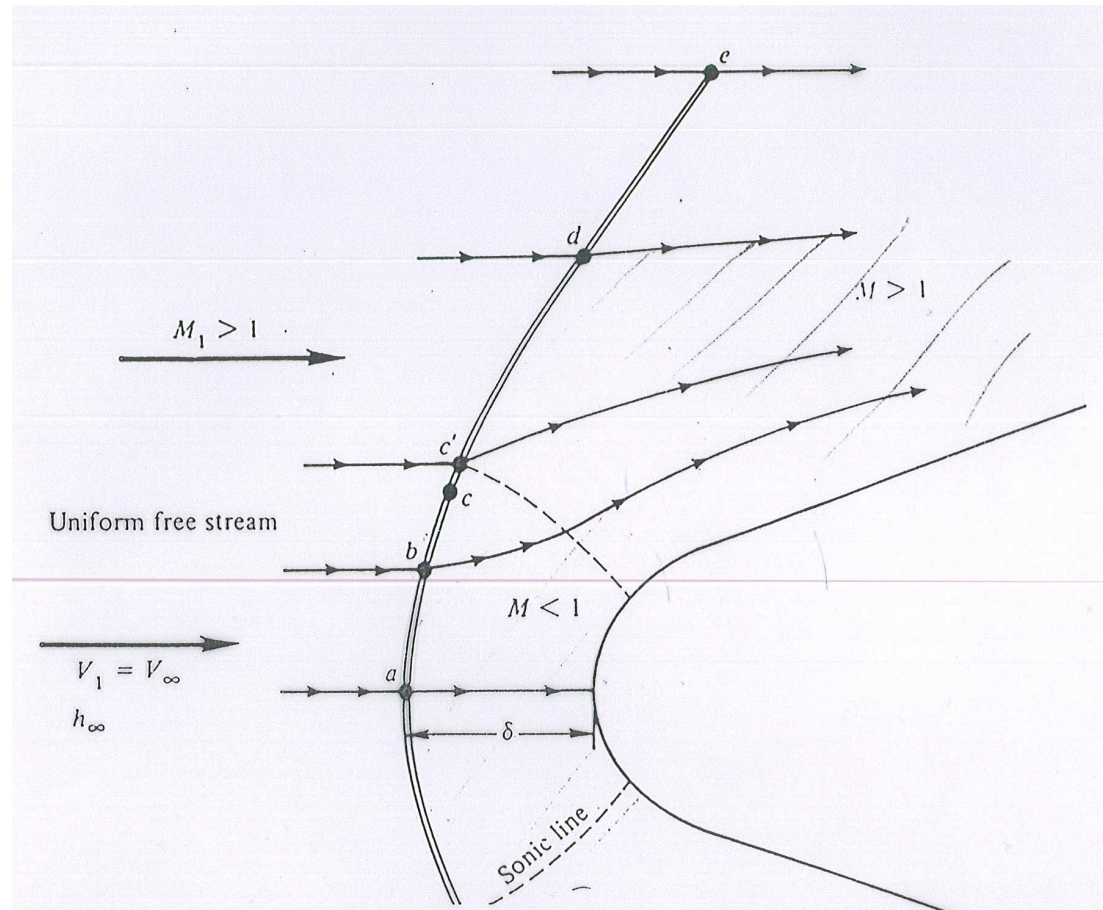
- Motivations. Equations d'Euler et système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité

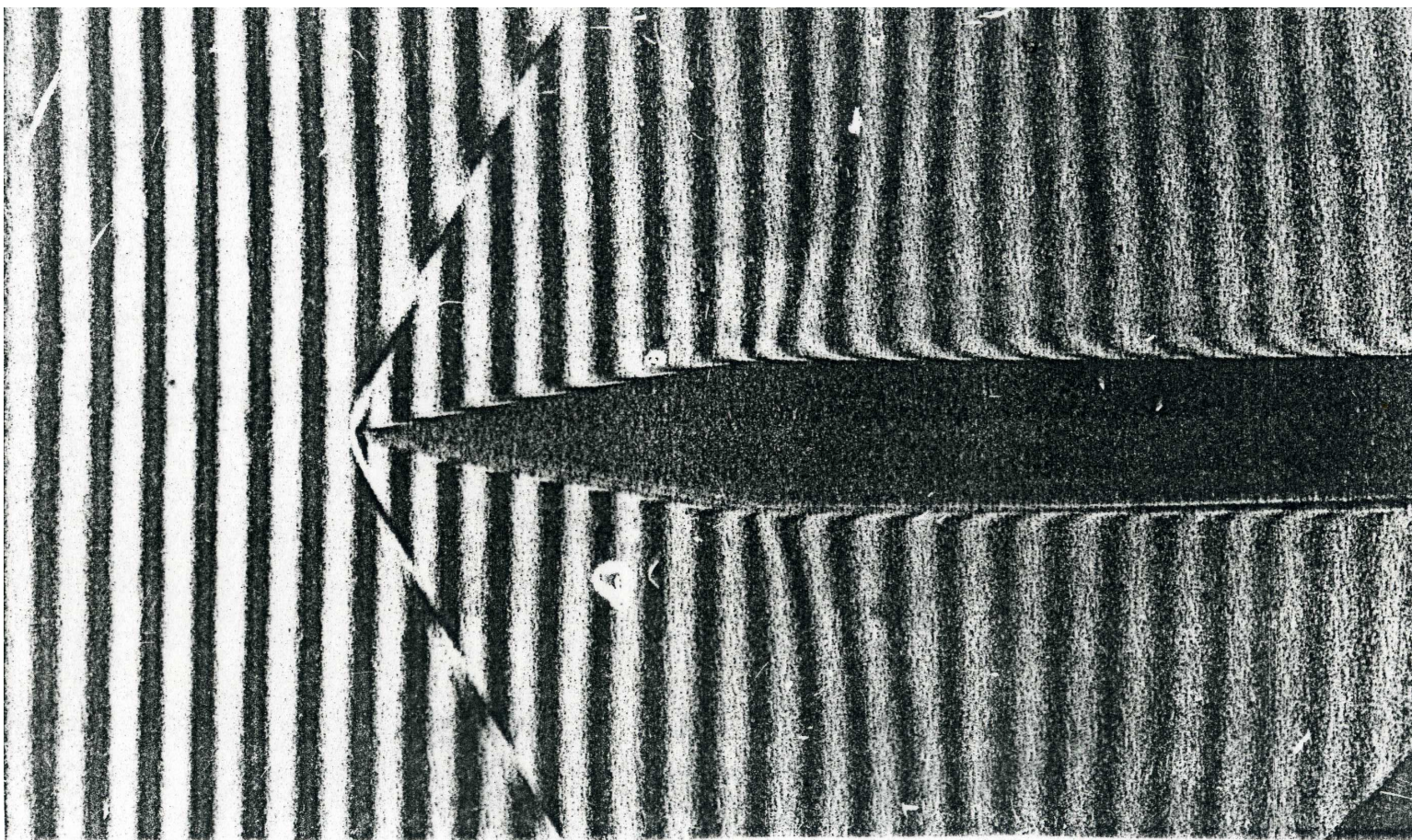
Application de la méthode des caractéristiques

- Construction de la solution en domaine supersonique
 - Domaines de dépendance et d'influence
 - Illustration: divergent de la tuyère

Écoulement homoénergétique et homoentropique

- Propriétés, invariants de Riemann
 - Onde simple
- Écoulement supersonique le long d'une paroi
 - Détente de Prandtl-Meyer
 - Coudes supersoniques





LES EQUATIONS D'EULER (régularité, stationnaire)

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \operatorname{div}(\underline{U}) = 0 \quad (\text{Masse})$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p \quad (\text{Dynamique})$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

Avec les relations et notations

$$c = c(p, s), \quad \rho = \rho(p, s), \quad \underline{U} = (U, \theta) = (u, v)$$

Courbes caractéristiques? Les trajectoires C_o

$$ds_{C_o} = 0, \quad dH_{C_o} = 0 \rightarrow \rho U dU_{C_o} + dp_{C_o} = 0$$

Notations et inconnues

$$\underline{U} = (U, \theta) = (u, v), \quad (u, v, p, s)$$

Système quasi-linéaire (homogène)

$$(u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial v}{\partial x} + (v^2 - c^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \quad \underline{\text{grad}}[a] \cdot \underline{U} = 0, \quad a = s, H$$

Avec les relations

$$c = c(p, s), \quad \rho = \rho(p, s)$$

Courbes caractéristiques? Les trajectoires C_o

$$ds_{C_o} = 0, \quad dH_{C_o} = 0 \rightarrow \rho U dU_{C_o} + dp_{C_o} = 0$$

Méthode des caractéristiques

$$(u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial v}{\partial x} + (v^2 - c^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a(P) \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{du}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + a(P) \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + a(P) \frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{dp}{dx} \right)_{\mathcal{L}}$$

pente et équations d'état

$$a(P) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mathcal{L}}(P), \quad c = c(p, s), \quad \rho = \rho(p, s)$$

Recherche d'autres courbes caractéristiques?

- Choix de $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ tel que $\underline{U}(P) = u(P)\underline{e}_x$

Résultats importants

- Système Hyperbolique (condition) **si $M(P) > 1$!**
 - $a(P) = 0$: on retrouve la trajectoire
 - deux autres famille de courbes C_- et C_+ :

$$a_-(P) = -\tan[\alpha(P)], \quad a_+(P) = \tan[\alpha(P)], \quad \alpha(P) = \arcsin[1/M(P)]$$

NATURE ET DISCUSSION LOCALES!

- Hyperpolique **conditionnel et local** pour $M > 1$
 - Si $M > 1$ en P alors deux familles C_- et C_+ **au voisinage** du point P

Relations de compatibilité associées?

$$C_o : dp_{C_o} + \rho U dU_{C_o} = 0, \quad (ds_{C_o} = 0)$$

Si $M > 1$

$$C_- : d\theta_{C_-} - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} dp_{C_-} = 0$$

$$C_+ : d\theta_{C_+} + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2} dp_{C_+} = 0$$

Invariants de Riemann?

- s et H sur chaque trajectoire C_0 pour tout M !
- Sur les C_- et C_+ pour $M > 1$?

Pas toujours!

Ecriture alternative des relations de compatibilité (si $M > 1$)

$$H = h + U^2/2 \quad \text{avec} \quad h = h(p, \rho) = h(c, s)$$

Partout dans le fluide

$$dH = dh + U dU, \quad dh = T ds + dp/\rho \quad \text{Gibbs}$$

$$\frac{dp}{\rho} = dH - U dU - T ds$$

Nouvelle écriture

$$C_- : \quad \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} d\theta_{C_-} = \frac{dH_{C_-} - T ds_{C_-}}{U} - dU_{C_-}$$

$$C_+ : \quad \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} d\theta_{C_+} = dU_{C_+} - \frac{dH_{C_+} - T ds_{C_+}}{U}$$

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6

Rappels

- Motivations. Equations d'Euler et système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité

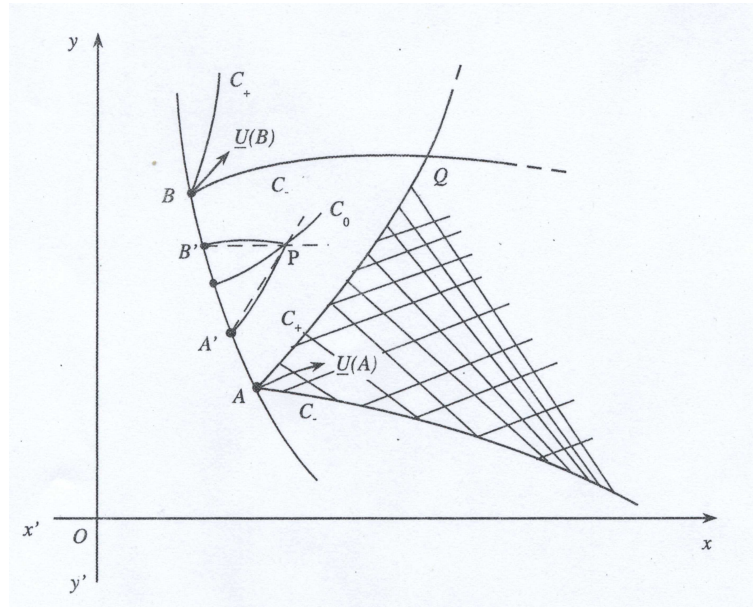
Application de la méthode des caractéristiques

- Construction de la solution en domaine supersonique
 - Domaines de dépendance et d'influence
 - Illustration: divergent de la tuyère

Écoulement homoénergétique et homoentropique

- Propriétés, invariants de Riemann
 - Onde simple
- Écoulement supersonique le long d'une paroi
 - Détente de Prandtl-Meyer
 - Coudes supersoniques

Construction de la solution en $P(x, y)$ (domaine supersonique)



Obtention de (θ, p, x, y) ?

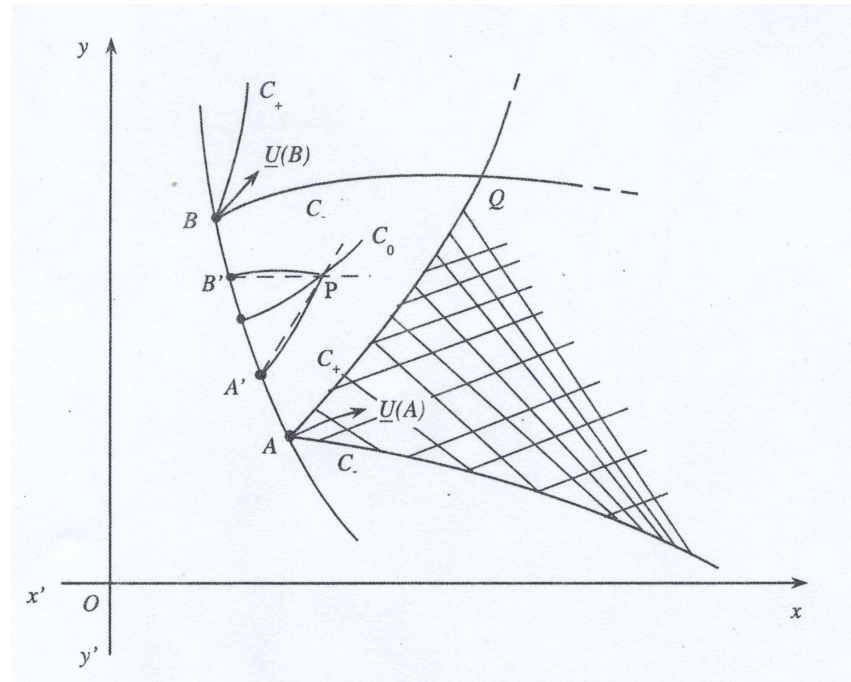
$$y - y(A') = \tan[\alpha(A') + \theta(A')]\{x - x(A')\}$$

$$y - y(B') = \tan[-\alpha(B') + \theta(B')]\{x - x(B')\}$$

$$\theta - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2}(B')p = \theta(B') - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2}(B')p(B')$$

$$\theta + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2}(A')p = \theta(A') + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho U^2}(A')p(A')$$

Construction de la solution en $P(x, y)$ (domaine supersonique)



Obtention de U, s, H ?

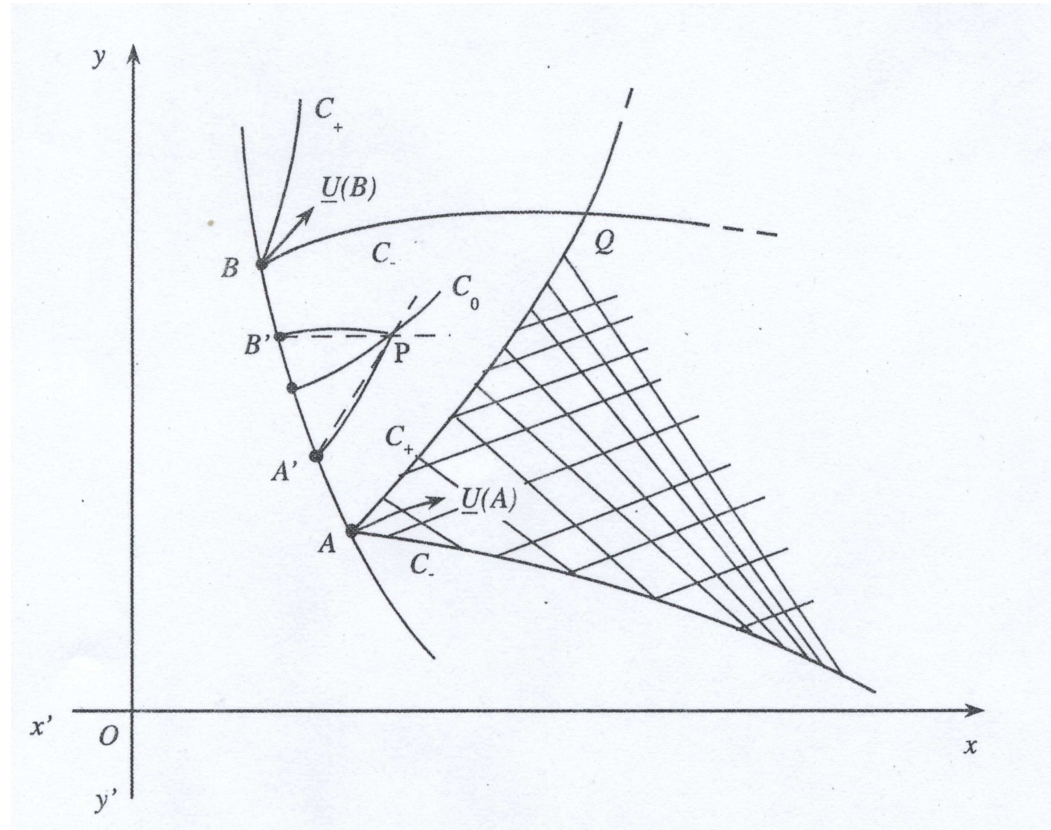
Introduction de $Q(X, Y)$ intersection de l'arc $A'B'$
et de la trajectoire passant par P

$$Y - y = \tan[\theta]\{X - x\}, \quad Q(X, Y) \text{ sur } A'B'$$

$$[\rho U](Q)\{U - U(Q)\} + p(\theta) - p(Q) = 0$$

$$s = s(Q), \quad H = H(Q)$$

Domaines de dépendance et d'influence



- Domaine de dépendance de l'arc AB
- Domaine d'influence du point A

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6

Rappels

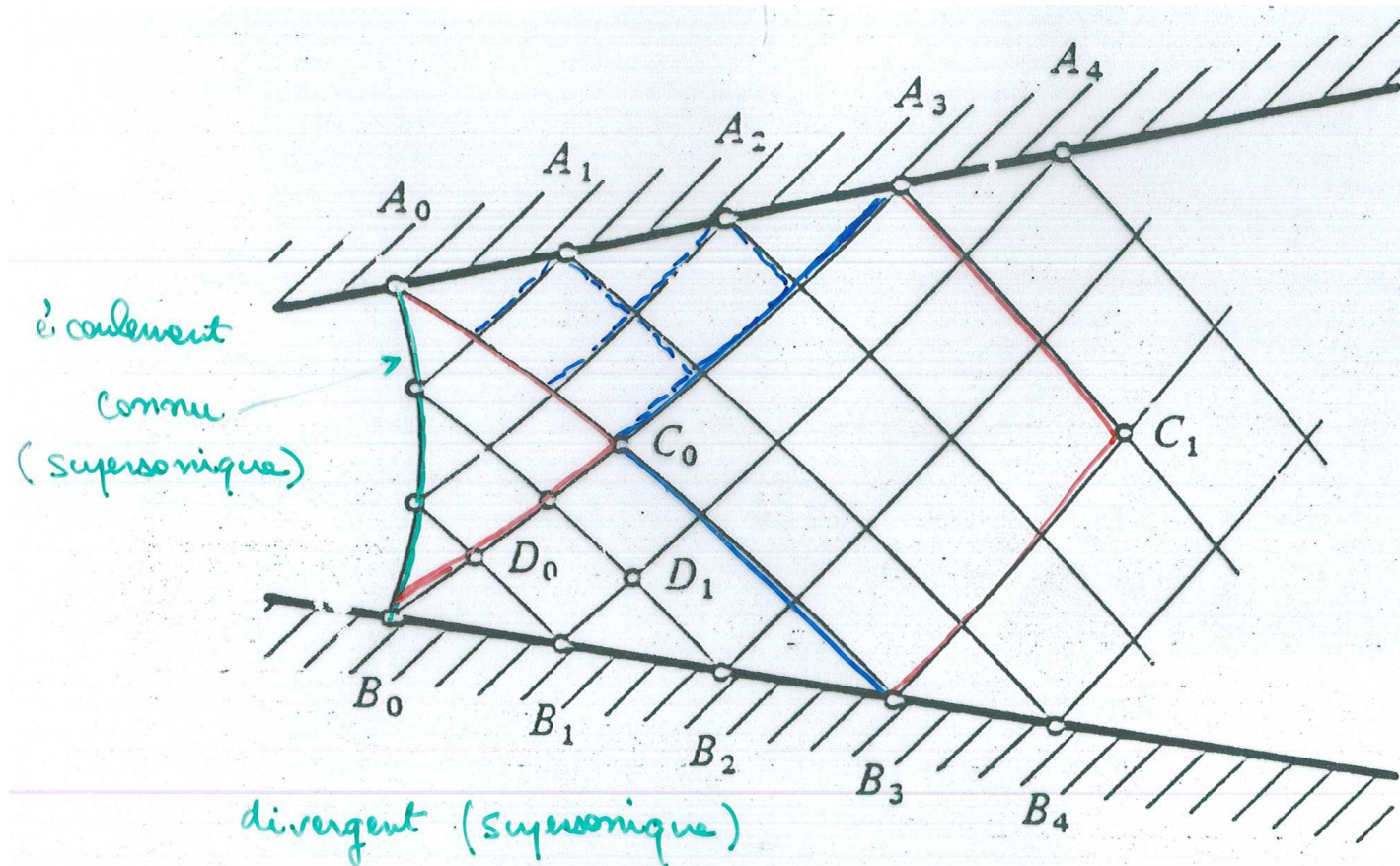
- Motivations. Equations d'Euler et système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité

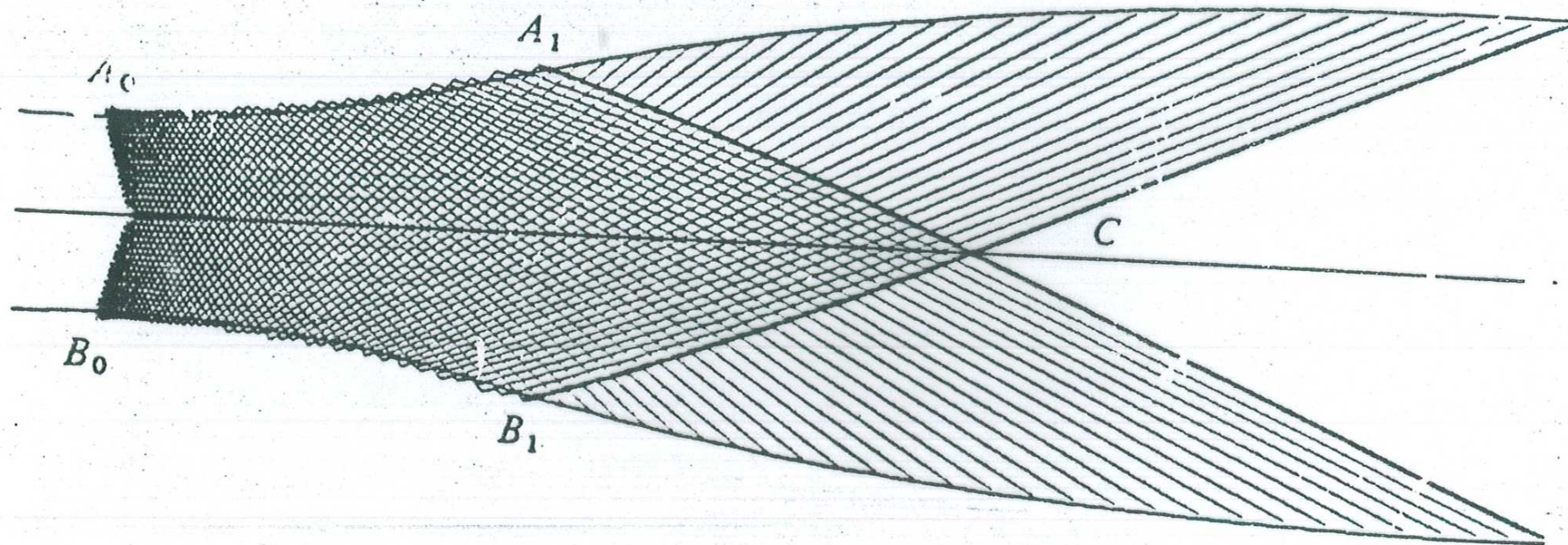
Application de la méthode des caractéristiques

- Construction de la solution en domaine supersonique
 - Domaines de dépendance et d'influence
 - Illustration: divergent de la tuyère

Écoulement homoénergétique et homoentropique

- Propriétés, invariants de Riemann
 - Onde simple
- Écoulement supersonique le long d'une paroi
 - Détente de Prandtl-Meyer
 - Coudes supersoniques





ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6

Rappels

- Motivations. Equations d'Euler et système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité

Application de la méthode des caractéristiques

- Construction de la solution en domaine supersonique
 - Domaines de dépendance et d'influence
 - Illustration: divergent de la tuyère

Écoulement homoénergétique et homoentropique

- Propriétés, invariants de Riemann
- Onde simple
- Écoulement supersonique le long d'une paroi
 - Détente de Prandtl-Meyer
 - Coudes supersoniques

Cas général (homoénergétique)

- Liens importants

$$H_0 = h(c, s) + \frac{U^2}{2}, \quad c = c(U, s; H_0), \quad M = M(U, s; H_0)$$

Ecriture alternative des relations de compatibilité (si $M > 1$)

Partout dans le fluide

$$\frac{dp}{\rho} = dH - U dU - T ds$$

- Nouvelle écriture

$$C_- : \quad \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} d\theta_{C_-} = \frac{dH_{C_-} - T ds_{C_-}}{U} - dU_{C_-}$$

$$C_+ : \quad \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} d\theta_{C_+} = dU_{C_+} - \frac{dH_{C_+} - T ds_{C_+}}{U}$$

Cas homoénergétique et homoentropique

- Liens importants valables partout

$$c = c(U; s_0, H_0), \quad M = M(U; s_0, H_0), \quad dp = -\rho U dU$$

- Invariants de Riemann sur les caractéristiques C_- et C_+ !

$$C_- : R_- = -\theta - f(M); \quad J_- = -\theta - \chi(U)$$

$$C_+ : R_+ = \theta - f(M); \quad J_+ = \theta - \chi(U)$$

$$\frac{d\chi}{dU} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{U}, \quad M = \frac{U}{c} = M(U; s_0, H_0)$$

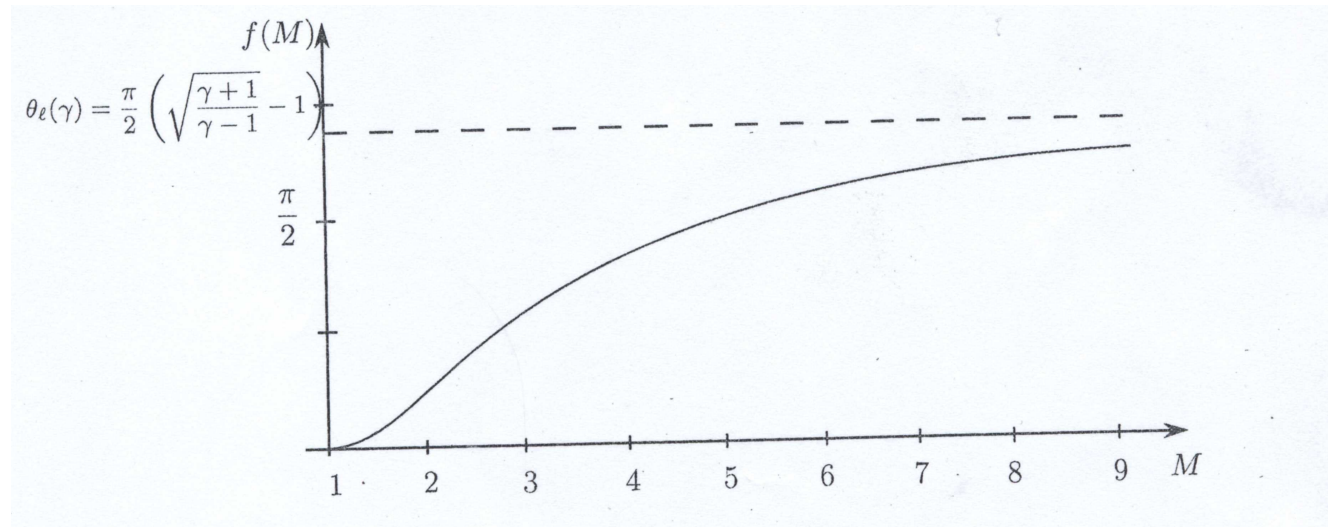
$$\frac{df}{dM} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{[1 - M \frac{dc}{dU}]M}, \quad \frac{dc}{dU}(M; s_0, H_0)$$

Cas du gaz parfait polytropique

$$p = \rho r T, \quad c^2 = \gamma r T, \quad H = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{U^2}{2}$$

Fonction de Prandtl-Meyer $f(M)$ avec $f(1) = 0$

$$\frac{dc}{dU} = -\frac{\gamma - 1}{2} M, \quad \sin[\alpha] = \frac{1}{M}$$



$$f(M) = \int_1^M \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} x^2\right] x} dx$$

ÉCOULEMENT COMPRESSIBLE PLAN ET PERMANENT

Chapitre 6

Rappels

- Motivations. Equations d'Euler et système quasi-linéaire
- Courbes caractéristiques et relations de compatibilité

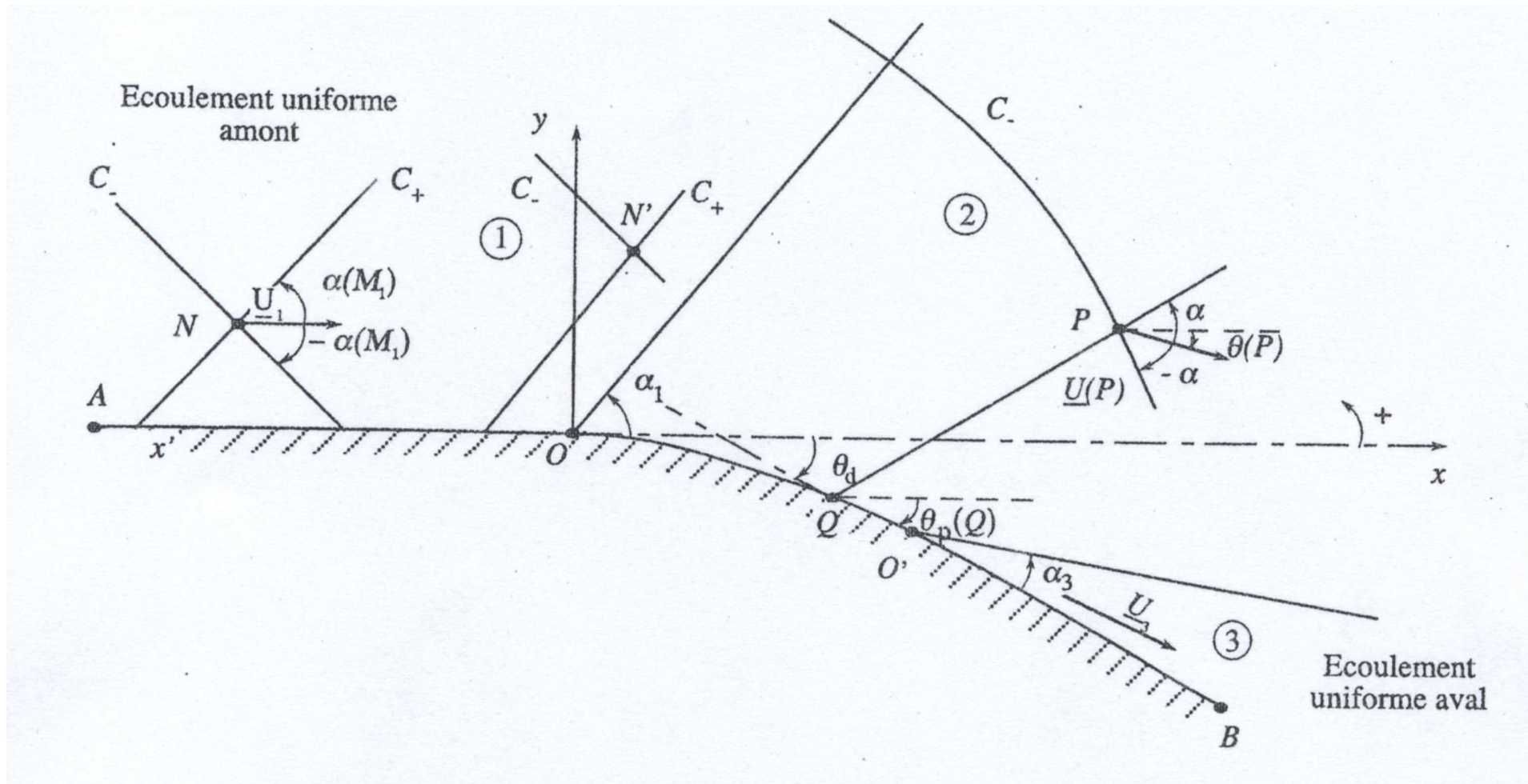
Application de la méthode des caractéristiques

- Construction de la solution en domaine supersonique
 - Domaines de dépendance et d'influence
 - Illustration: divergent de la tuyère

Écoulement homoénergétique et homoentropique

- Propriétés, invariants de Riemann
 - Onde simple
- Écoulement supersonique le long d'une paroi
 - Détente de Prandtl-Meyer
 - Coudes supersoniques

Ecoulement **supersonique** le long d'une paroi?



Onde simple!

Onde simple: définition et propriétés

- Région du plan (x, y) jouxtant un écoulement uniforme
 - Frontière? C_+ ou C_- de l'écoulement uniforme
- Si une $C_+(C_-)$ est frontière les $C_+(C_-)$ dans l'onde simple sont rectilignes et l'écoulement uniforme sur ces $C_+(C_-)$

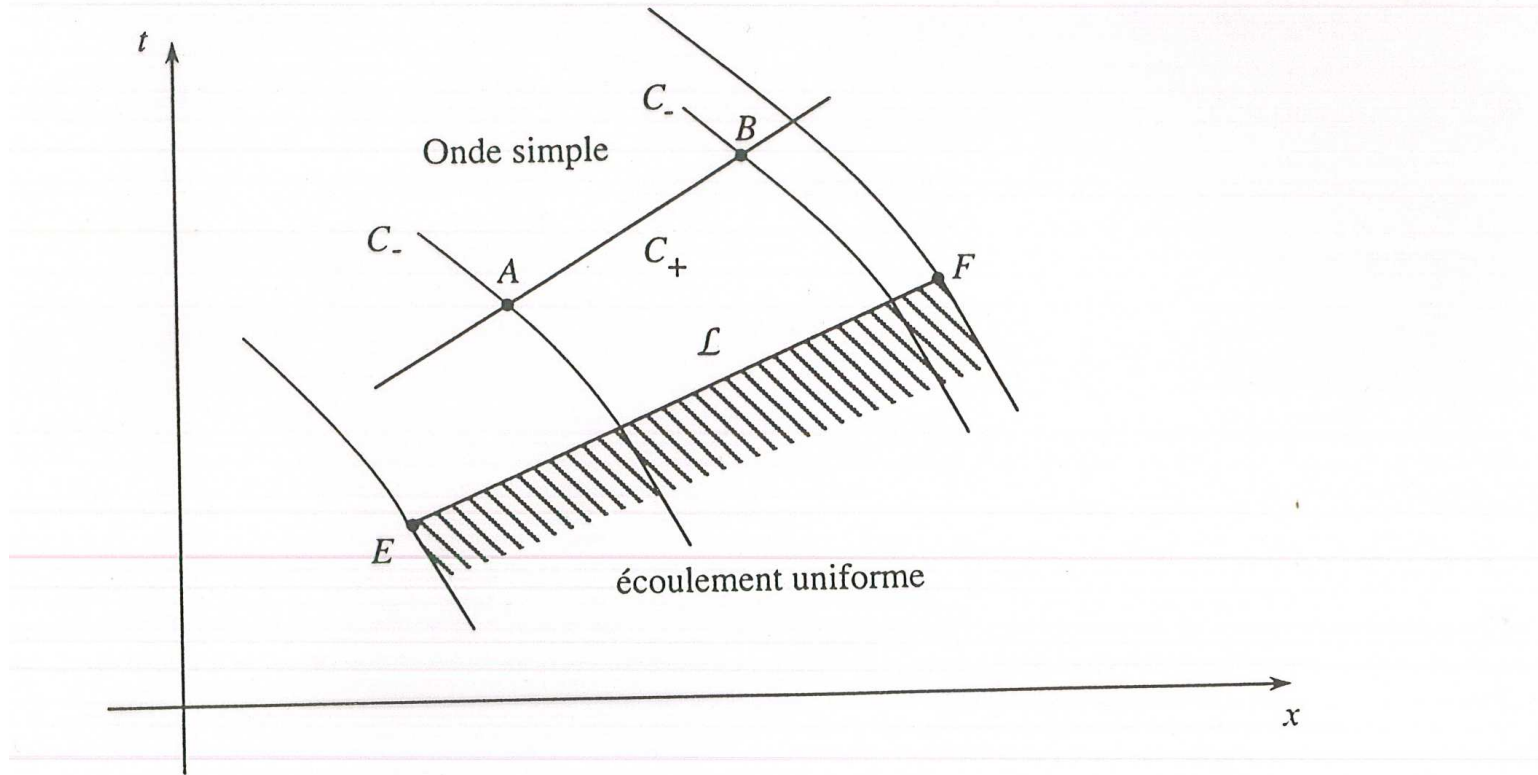
Démonstration

$(\underline{U}_o, p_o, \rho_o)$ uniforme $\Rightarrow$ homoentropique et homoénergétique

Invariants de Riemann J_+ et J_- !

$$C_- : \theta_A + f(M_A) = \theta_o + f(M_o) = \theta_B + f(M_B)$$

$$C_+ : \theta_A - f(M_A) = \theta_B - f(M_B)$$

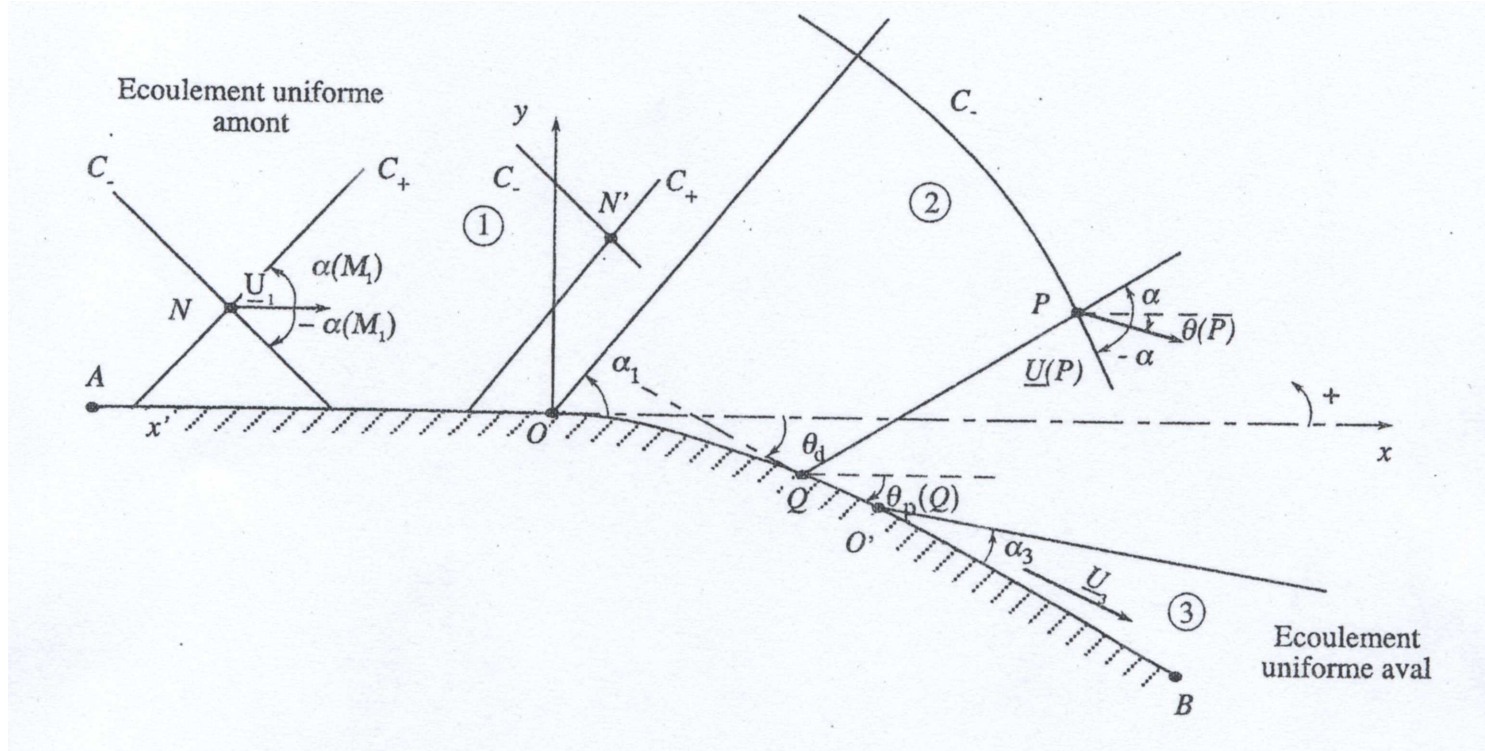


0

$$C_- : \theta_A + f(M_A) = \theta_o + f(M_o) = \theta_B + f(M_B)$$

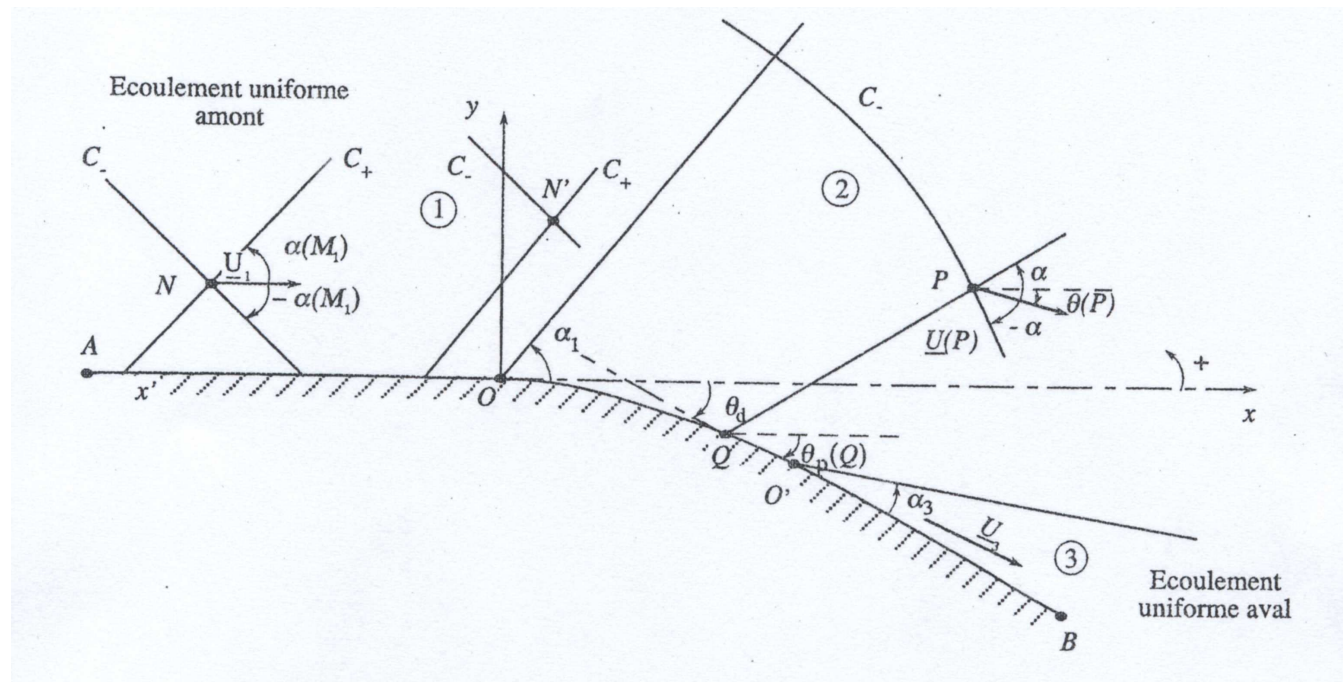
$$C_+ : \theta_A - f(M_A) = \theta_B - f(M_B)$$

Résolution par onde simple



- paroi connue $Q(\tau, Y(\tau))$, déviation $\theta_d < 0$
- frontières de l'onde simple? $\alpha(M_1)$, $\alpha(M_3)$

Solution dans l'onde simple en $P(x, y)$?

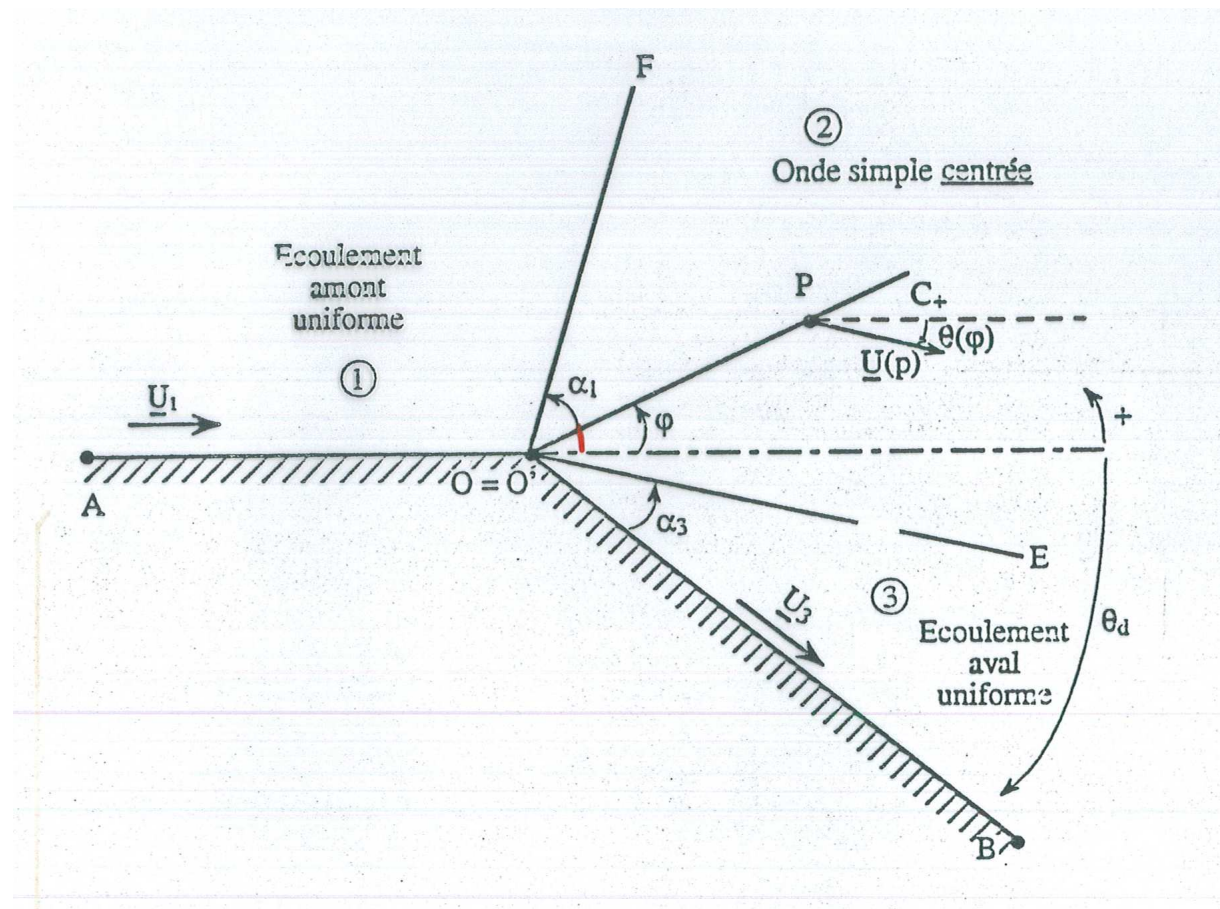


$\theta_P = \arctan[Y'(\tau)]$ et équations paramétriques

$$y - Y(\tau) = \tan\left[\arcsin\left(\frac{1}{M_P}\right) + \arctan(Y'(\tau))\right](x - \tau)$$

$$f(M_P) = f(M_1) - \arctan[Y'(\tau)]$$

$$\tau = \tau(x, y), \quad M_P, \quad \theta_P$$





PC6

- Détente le long d'une paroi (autre méthode également!)
 - Détente de Prandtl-Meyer pour une arête

AMPHI 7

- Ecoulements compressibles,
permanents, plans de perturbation
- Ecoulements potentiels autour d'un profil

