

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

SEANCE 7

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Nature et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs obliques et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan
Profils d’aile

ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Motivations

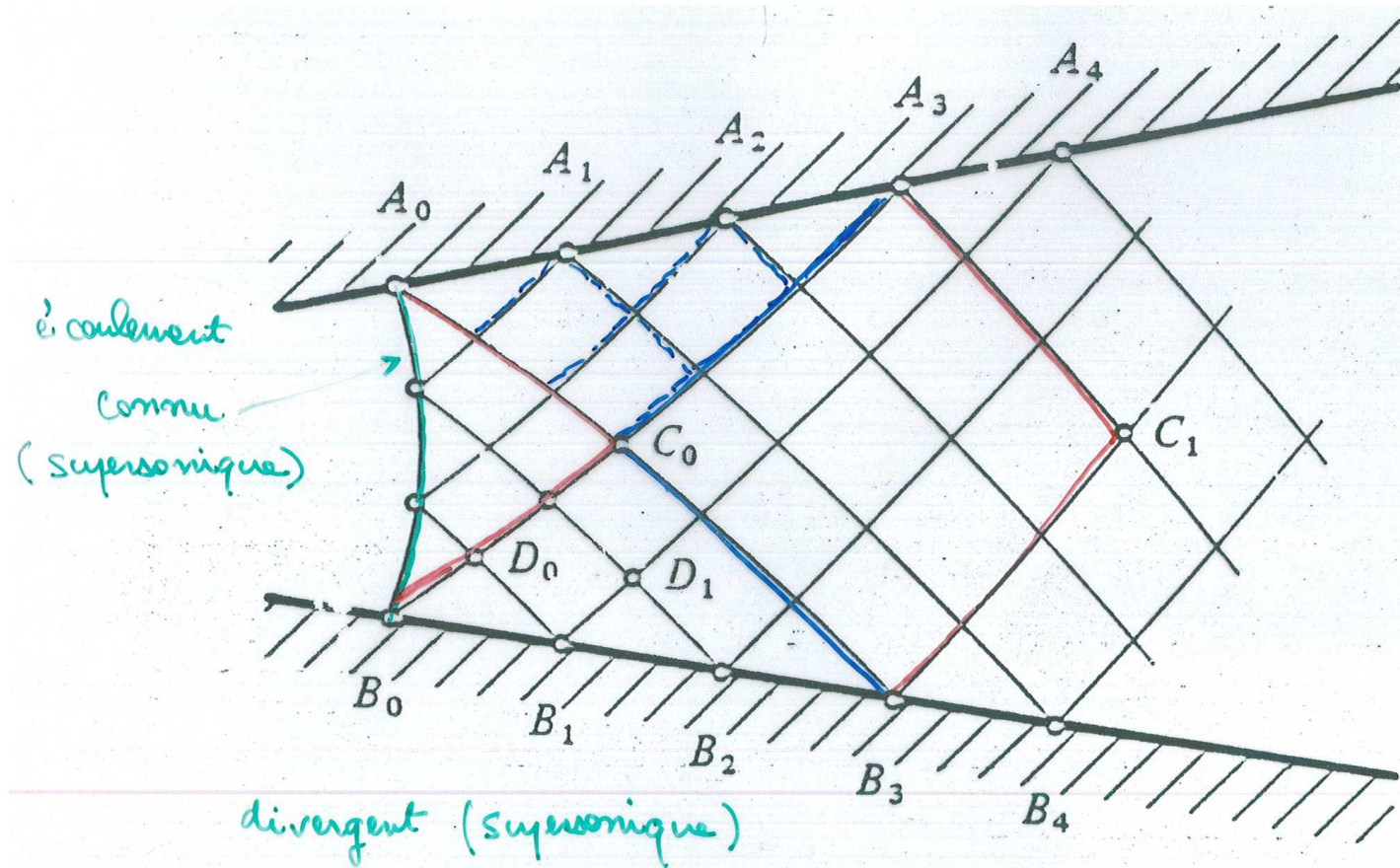
- Voisinage du col sonique d'une tuyère
 - Profil d'aile

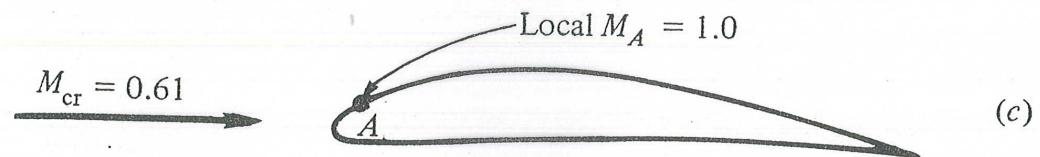
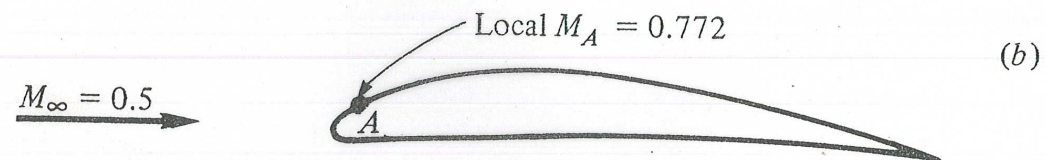
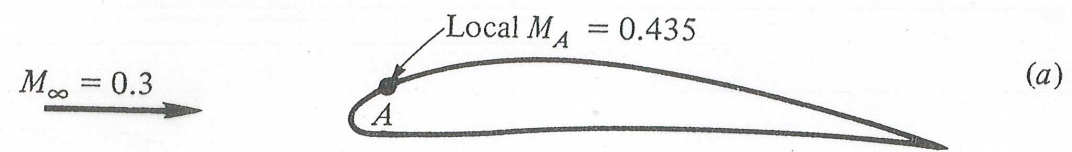
Problème général

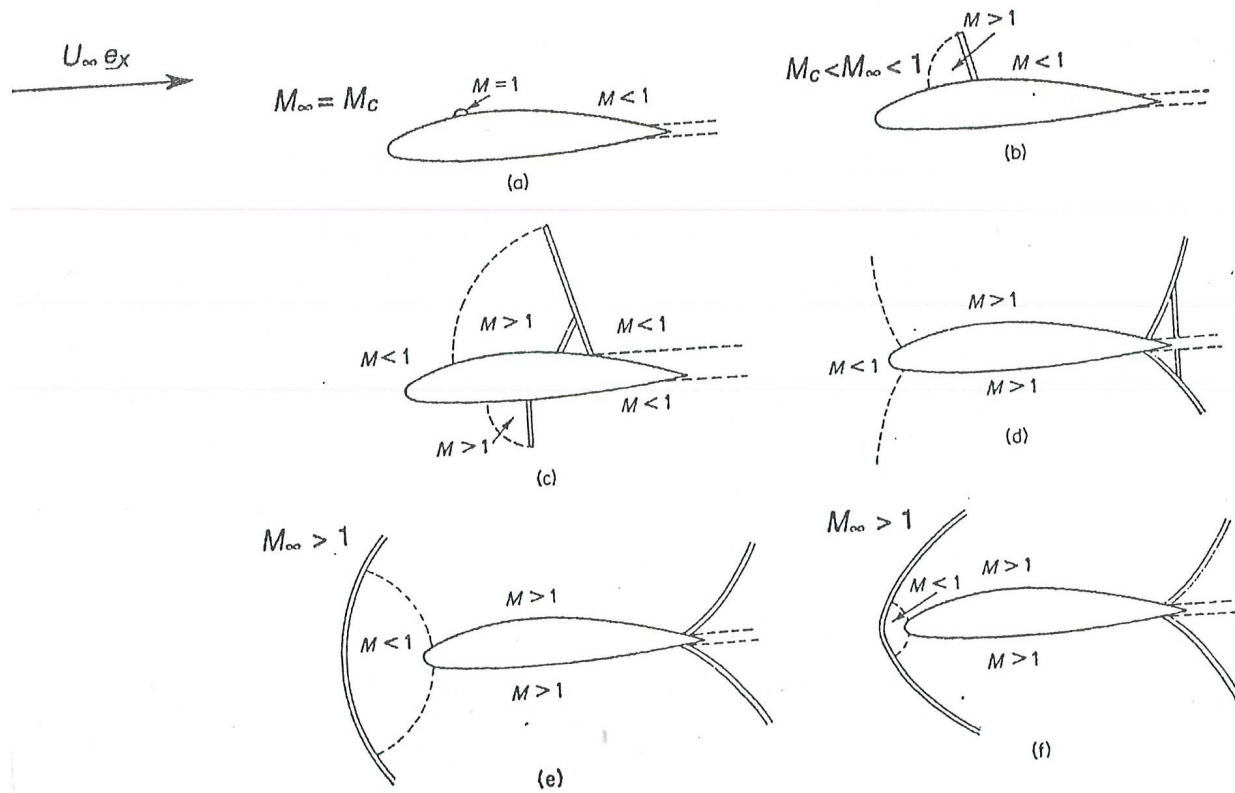
- Equations d'Euler. Cas permanent
- Théorème de Crocco et implications
- Hypothèses de travail et premières conséquences
 - Pression et efforts de pression
- Expression alternative de la résultante des efforts

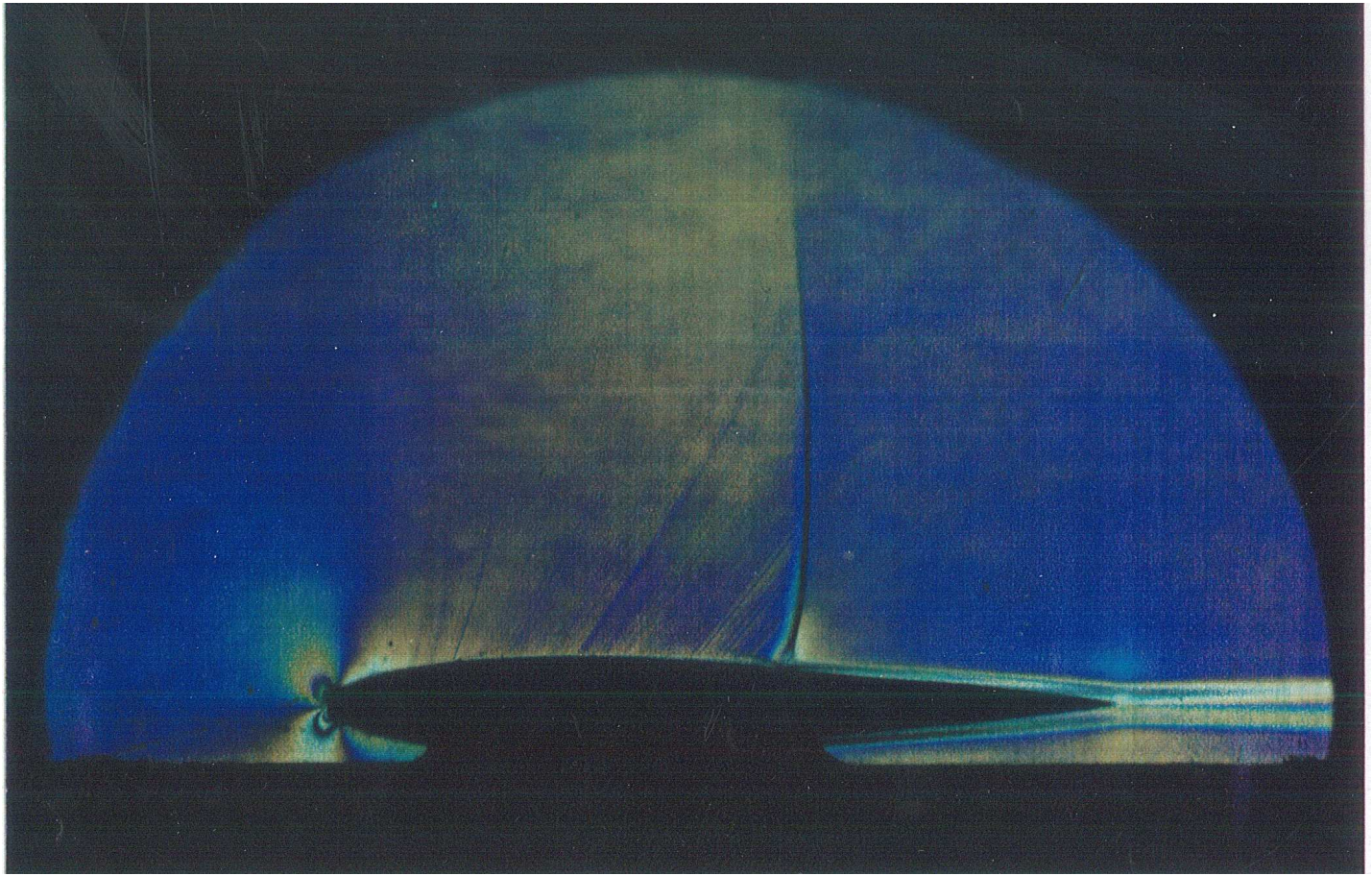
Écoulement potentiel

- Dans quels cas strictement?
- Problème complet du potentiel
- Cas du gaz parfait polytrophique









ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Motivations

- Voisinage du col sonique d'une tuyère
 - Profil d'aile

Problème général

- Equations d'Euler. Cas permanent
- Théorème de Crocco et implications
- Hypothèses de travail et premières conséquences
 - Pression et efforts de pression
- Expression alternative de la résultante des efforts

Écoulement potentiel

- Dans quels cas strictement?
- Problème complet du potentiel
- Cas du gaz parfait polytropique

Écoulement de perturbation

- Hypothèses et conséquences
- Linéarisation des conditions aux limites
 - Coefficient de pression linéarisé
 - Régime supersonique linéarisé

Fluide parfait, non conducteur, sans taux de chaleur extérieur

Equations locales d'Euler

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{U}) = 0 \quad (\text{Masse})$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p + \rho \underline{F}, \quad (\text{Dynamique})$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \quad (\text{Energie})$$

$$H = e + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \quad \text{Enthalpie totale spécifique}$$

Isentropique: $ds/dt = 0$. **Homoentropique?**

Isoénergétique si $dH/dt = 0$ (stationnaire avec $\underline{F} = \underline{0}$).

Homoénergétique?

LES EQUATIONS D'EULER (ECRITURE ALTERNATIVE) (régularité, stationnaire)

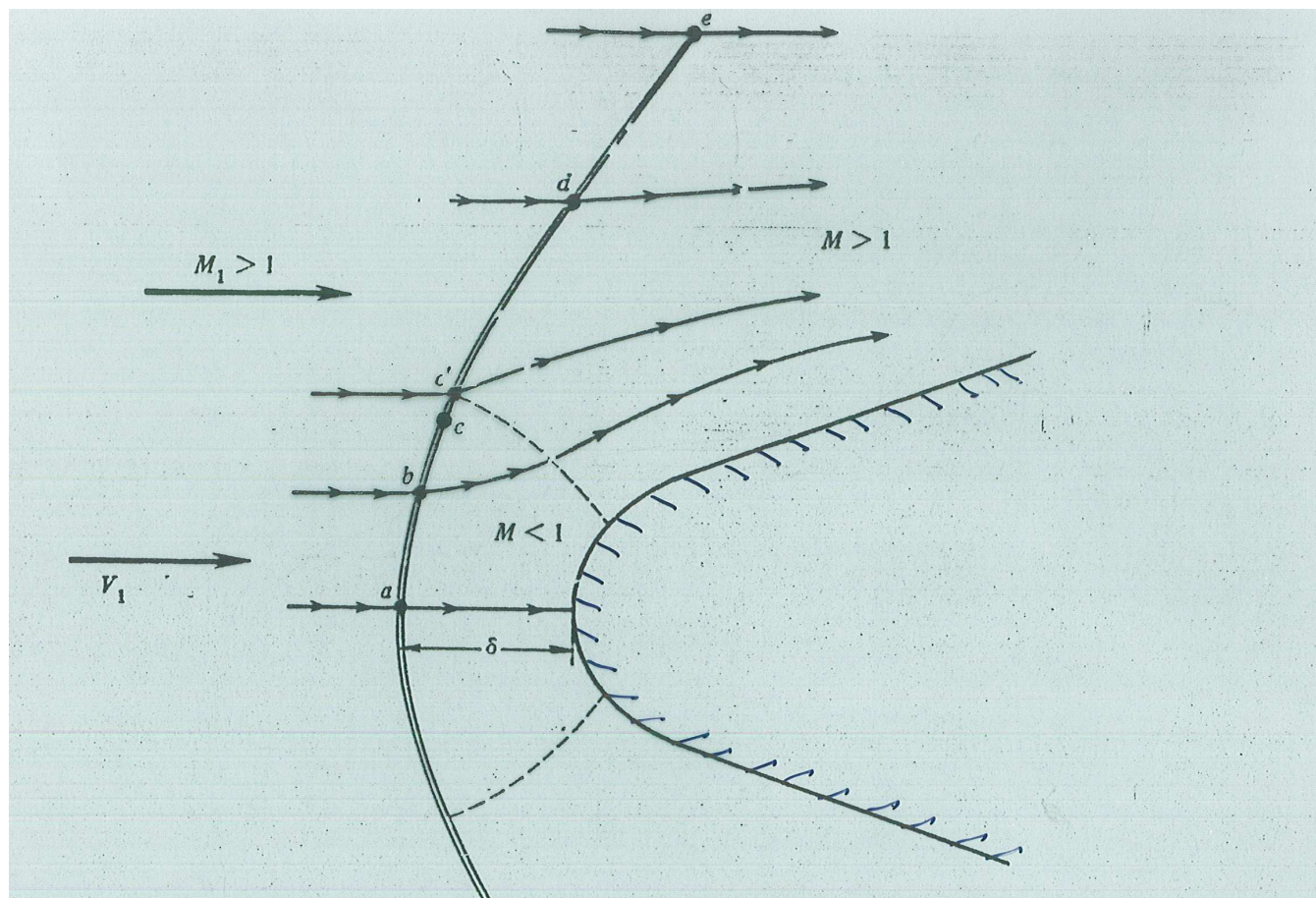
$$c^2 \operatorname{div}(\underline{U}) - \underline{\operatorname{grad}}\left[\frac{U^2}{2}\right] \cdot \underline{U} = 0$$

$$\underline{\operatorname{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\operatorname{grad}}\left[\frac{U^2}{2}\right] + \frac{1}{\rho} \underline{\operatorname{grad}}[p] = \underline{0}$$

$$\underline{\operatorname{grad}}[s] \cdot \underline{U} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\operatorname{grad}}[H] \cdot \underline{U} = 0$$

$$(\underline{U}, p, s), \quad c = c(p, s), \quad \rho = \rho(p, s)$$

Ecoulement isentropique et isoénergétique



Théorème de Crocco

$$\underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}[h + \frac{U^2}{2}] = T \underline{\text{grad}}[s]$$

montre que

- $3D$: $\underline{\text{rot}}(\underline{U}).\underline{U} \neq 0$

potentiel et {homoénergétique ou
homoentropique} $\rightarrow$ homoentropique
ou homoénergétique

- Si $2D$ ou $3D$ axisymétrique

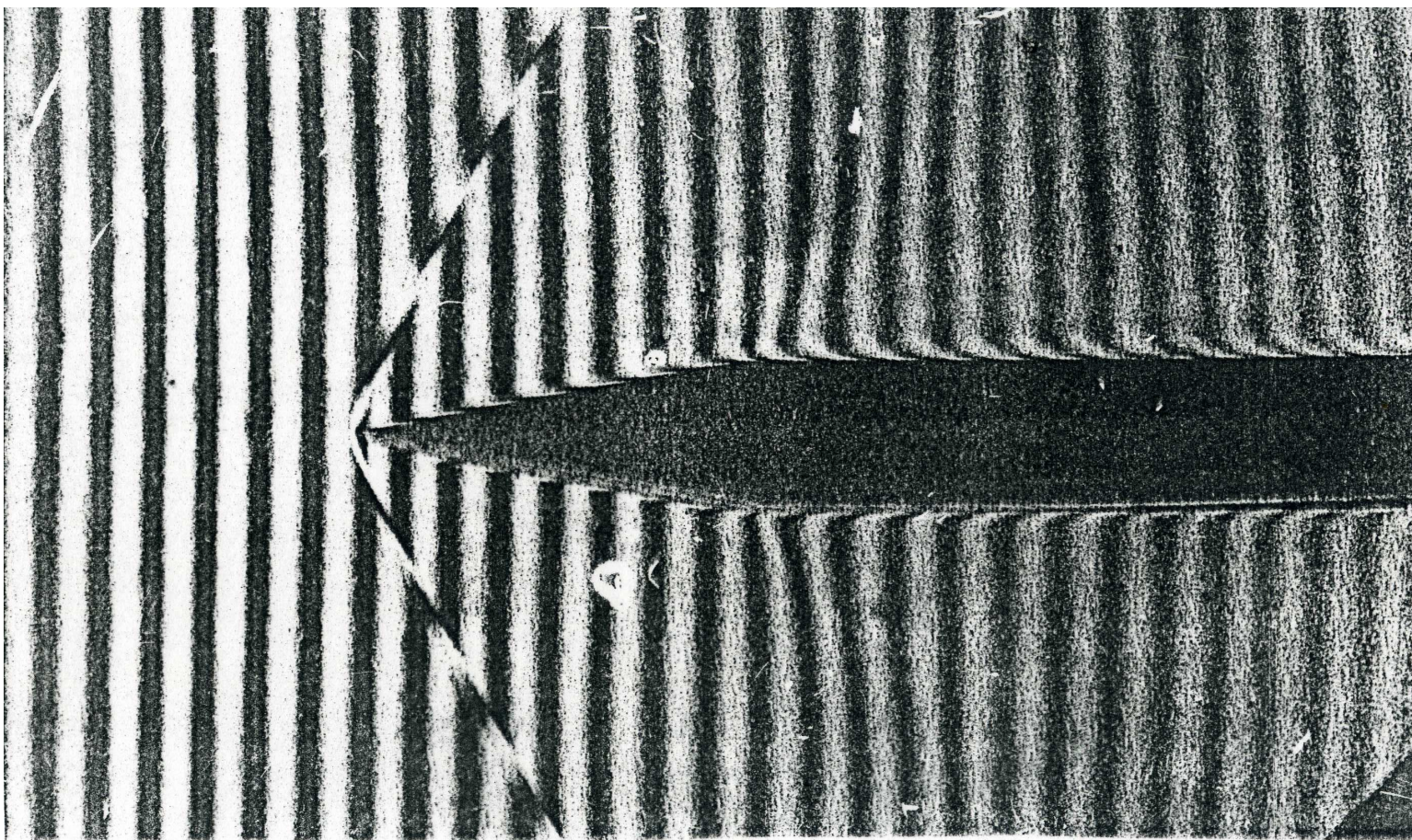
sans composante de vitesse orthoradiale

alors $\underline{\text{rot}}(\underline{U}).\underline{U} = 0$ et

2 parmi {potentiel, homoénergétique, homoentropique} $\rightarrow$ la troisième

Conséquences si choc stationnaire avec écoulement amont uniforme permanent

- Etat aval pour choc oblique permanent?
 1. homoénergétique ($H_{\text{amont}} = H_{\text{aval}}$)
 2. homoentropique ($s_2 \neq s_1$)
 3. potentiel ϕ : simplification!
- Etat aval pour choc courbe permanent?
 1. homoénergétique ($H_{\text{amont}} = H_{\text{aval}}$)
 2. seulement isentropique donc non potentiel!



ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Motivations

- Voisinage du col sonique d'une tuyère
 - Profil d'aile

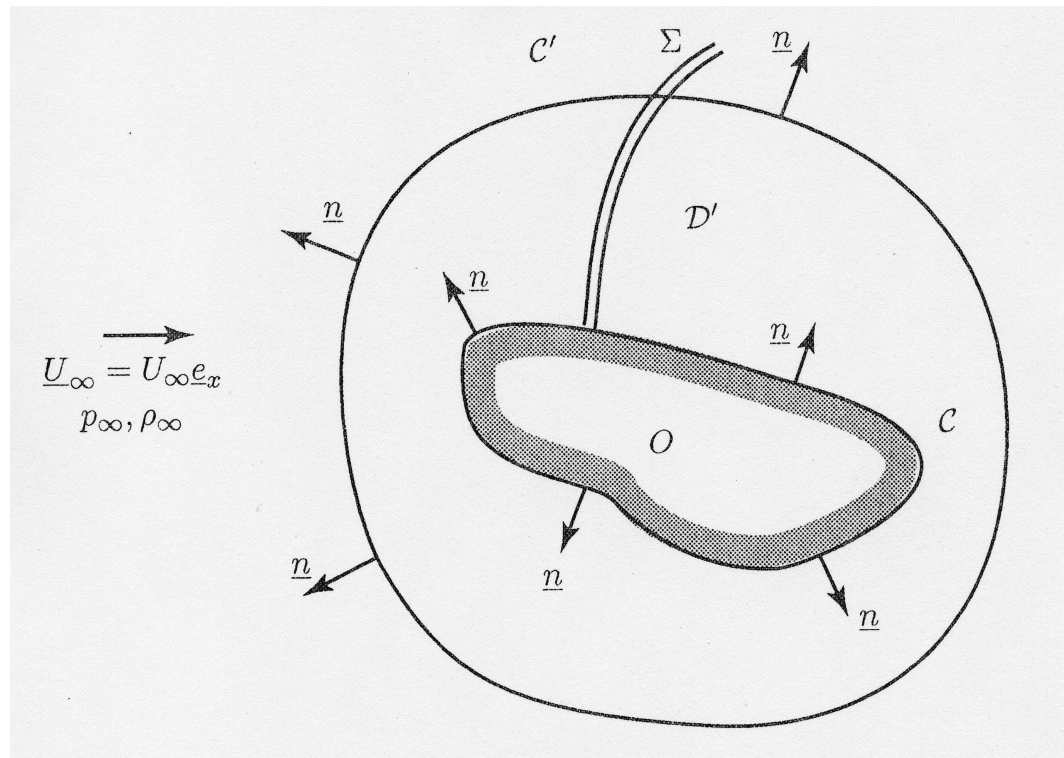
Problème général

- Equations d'Euler. Cas permanent
- Théorème de Crocco et implications
- Hypothèses de travail et premières conséquences
 - Pression et efforts de pression
- Expression alternative de la résultante des efforts

Écoulement potentiel

- Dans quels cas strictement?
- Problème complet du potentiel
- Cas du gaz parfait polytropique

Hypothèses et premières conséquences



- écoulement permanent
- état amont uniforme $U_\infty \underline{e}_x, p_\infty, \rho_\infty, s_\infty$
- choc(s) stationnaire(s) éventuel(s) quelconque(s): $H_{\text{amont}} = H_{\text{aval}}$
 - écoulement homoénergétique: $H = h(p, s) + U^2/2 = H_\infty$

Obtention des efforts de pression?

Coefficient local de pression

$$C_p(P) = \frac{p(P) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}, \quad p = p(U, s; s_\infty, H_\infty)$$

Résultante des efforts sur un contour fermé?

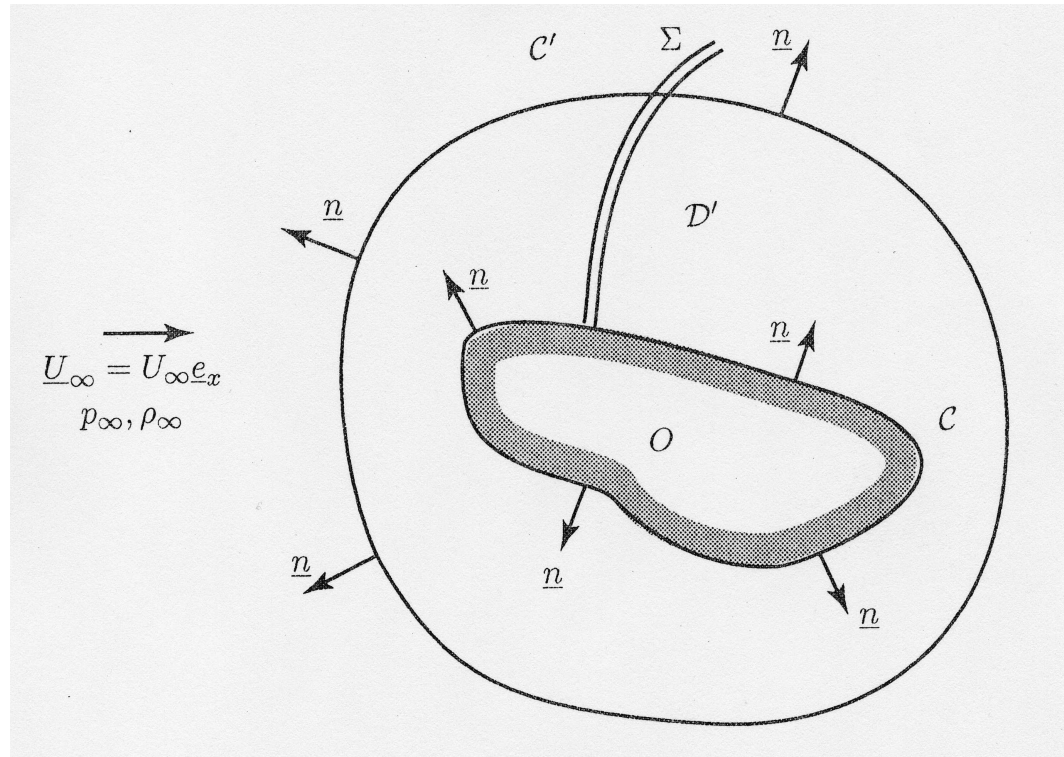
$$\underline{R} = R_x \underline{e}_x + R_y \underline{e}_y = - \oint_{\mathcal{C}} p \underline{n} dl$$

R_x : traînée et R_y : portance

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 (x_F - x_A)} : \text{coefficient de traînée}$$

$$C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 (x_F - x_A)} : \text{coefficient de portance}$$

Expression alternative de la résultante des efforts



$$\int_{\partial \mathcal{D}'} \{p \underline{n}' + \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}') \underline{U}\} da = \underline{0}$$

$$\underline{R} = - \oint_{\mathcal{C}'} \{p \underline{n} + \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}) \underline{U}\} dl$$

Besoin du comportement de $(\underline{U}, p, \rho)$ loin du profil

ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Motivations

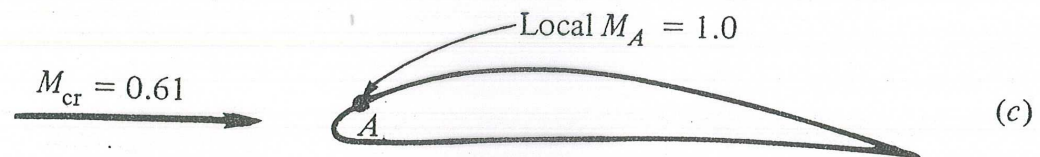
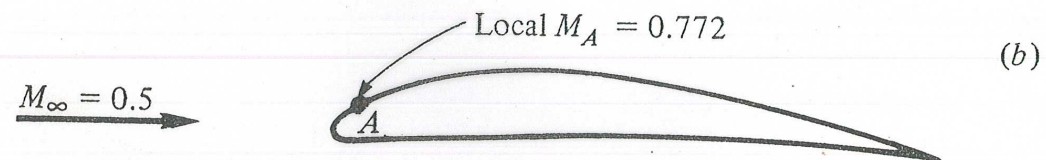
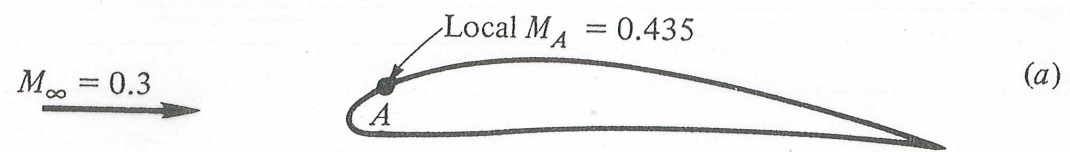
- Voisinage du col sonique d'une tuyère
 - Profil d'aile

Problème général

- Equations d'Euler. Cas permanent
- Théorème de Crocco et implications
- Hypothèses de travail et premières conséquences
 - Pression et efforts de pression
- Expression alternative de la résultante des efforts

Écoulement potentiel

- Dans quels cas strictement?
- Problème complet du potentiel
- Cas du gaz parfait polytropique



Cas de l'écoulement homoénergétique et homoentropique

Écoulement potentiel!

$$\underline{U} = \underline{\text{grad}}[\phi] = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$$

Écoulement homoénergétique (chocs ou non) et homoentropique

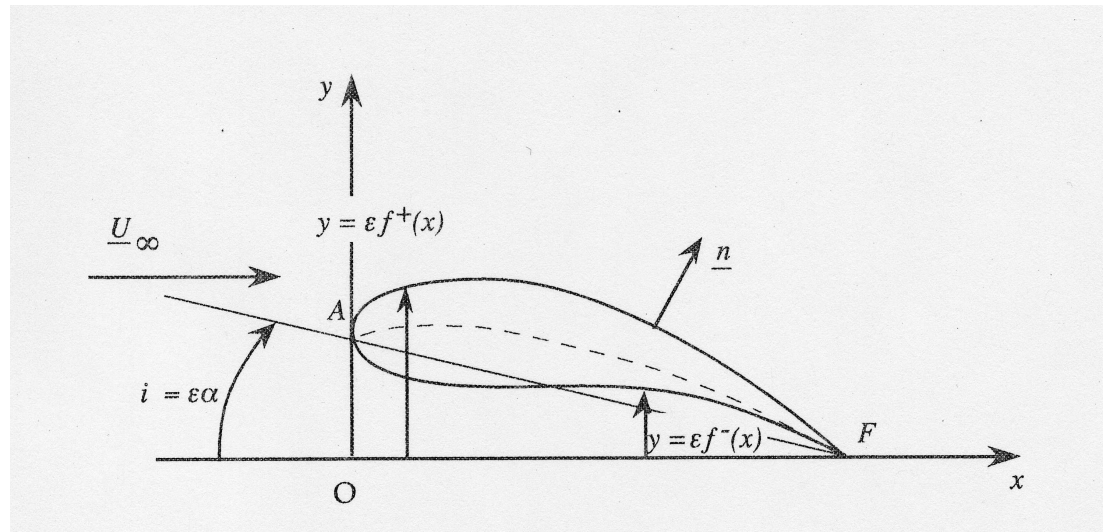
$$H = h(c, \textcolor{red}{s}_\infty) + \frac{U^2}{2} = H_\infty, \quad h = h(p, \textcolor{red}{s}_\infty)$$

Equation du potentiel

$$\textcolor{blue}{c}^2(U)\Delta\phi = \underline{\text{grad}}\left[\frac{(\underline{\text{grad}}[\phi])^2}{2}\right] \cdot \underline{\text{grad}}[\phi]$$

$$h(\textcolor{blue}{c}, s_\infty) = H_\infty - \frac{U^2}{2}$$

Conditions aux limites?



- A l'infini amont

$$\underline{U} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \underline{e}_y \rightarrow U_\infty \underline{e}_x, \quad x \rightarrow -\infty$$

- Sur toute paroi fixe, d'équation $y = h(x)$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}[x, h(x)] = \frac{dh}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial x}[x, h(x)], \quad x_A \leq x \leq x_F$$

- En régime subsonique: continuité de la pression au bord de fuite (K.J)

Approche par méthode des courbes caractéristiques?

$$\underline{U} = \underline{\text{grad}}[\phi] = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$$

Ce qui conduit pour le problème du potentiel à

$$(u^2 - c^2)\frac{\partial u}{\partial x} + uv\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] + (v^2 - c^2)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$h(\mathbf{c}, s_\infty) = H_\infty - \frac{U^2}{2}$$

valable pour gaz parfait ou non

Cas du gaz parfait polytropique ($\gamma, r = R/\mathcal{M}$)

Evolution homoentropique donc

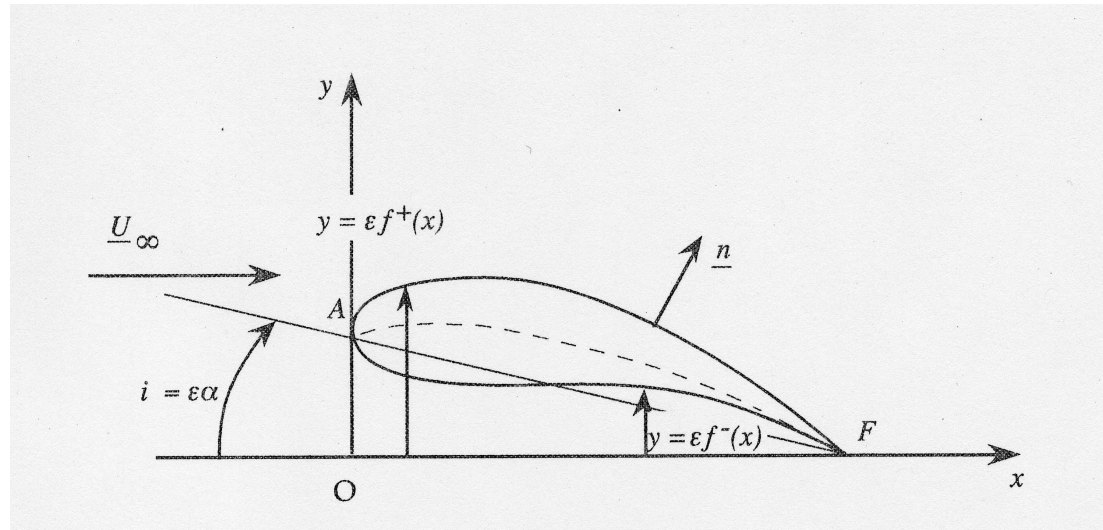
$$C_p(P) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2(P)}{U_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}$$

Problème exact vérifié par $\varphi = \phi - U_\infty x$?

Equation du potentiel

$$\begin{aligned} & \left[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ & + \left[1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ & - 2 \frac{M_\infty}{U_\infty} \left[1 + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Conditions aux limites?



- A l'infini amont

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0} \quad \text{si } x \rightarrow -\infty$$

- Sur toute paroi fixe, d'équation $y = h(x)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}[x, h(x)] = \frac{dh}{dx} \{U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x}[x, h(x)]\}, \quad x_A \leq x \leq x_F$$

- En régime subsonique: continuité de la pression au bord de fuite (K.J)

ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Écoulement potentiel

- Dans quels cas strictement?
- Problème complet du potentiel
- Cas du gaz parfait polytropique

Écoulement de perturbation

- Hypothèses et conséquences
- Linéarisation des conditions aux limites
 - Coefficient de pression linéarisé
 - Régime supersonique linéarisé

Hypothèses pour un écoulement de perturbation

Discontinuités faibles

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \eta, \quad \frac{s_2 - s_1}{s_1} = O(\eta^3)$$

$$|\underline{\text{rot}}(\underline{U})| = O(\eta^2)$$

Approximations proposées

- écoulement homoentropique
- écoulement potentiel (car de plus strictement homoénergétique)

$$\underline{U} = \underline{\text{grad}}[\phi] = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$$

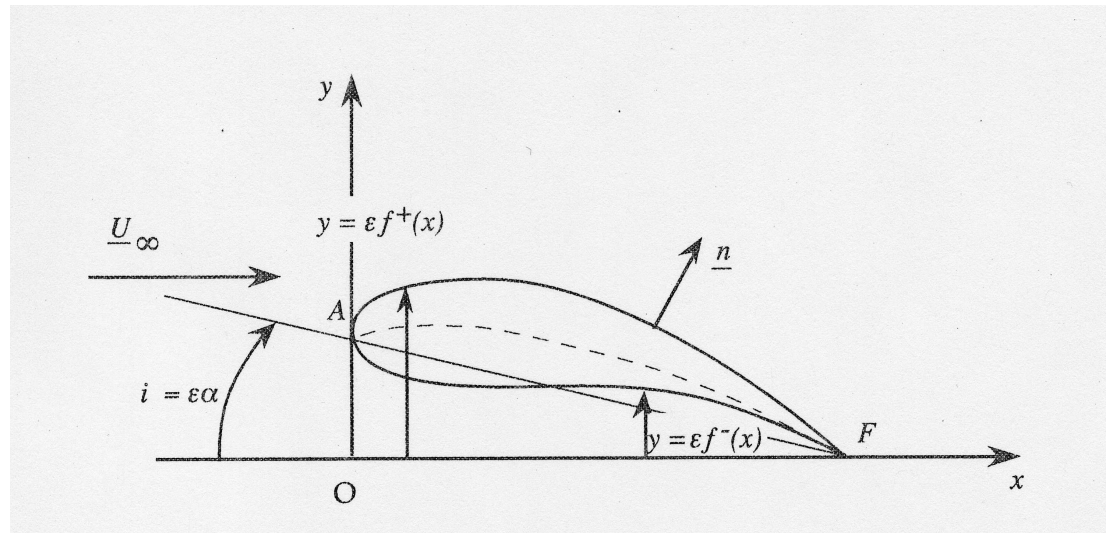
- écoulement continu de perturbation

$$\varphi = \phi - U_\infty x, \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]/U_\infty| \ll 1$$

Hypothèses pour un écoulement de perturbation

Linéarisation

$$\underline{U} = U_{\infty} \underline{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_{\infty}$$



$$h^+ = \epsilon f^+, \quad h^- = \epsilon f^-, \quad i = \alpha \epsilon = \frac{y_A - y_F}{x_F - x_A}$$

- Conditions aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_\infty \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

$$\text{K.J. : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0}, \quad x \rightarrow -\infty$$

- pression au sein du fluide?

$$C_p(P) = \frac{p(P) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P)$$

$$C_x = \frac{1}{x_F - x_A} \int_{x_A}^{x_F} \left[C_{pe}(x) \frac{dh^+}{dx} - C_{pi}(x) \frac{dh^-}{dx} \right] dx$$

$$C_y = -\frac{1}{x_F - x_A} \int_{x_A}^{x_F} [C_{pe}(x) - C_{pi}(x)] dx$$

Régime Supersonique: $0 < M_\infty^2 - 1 = O(1)$

Equation exacte du potentiel

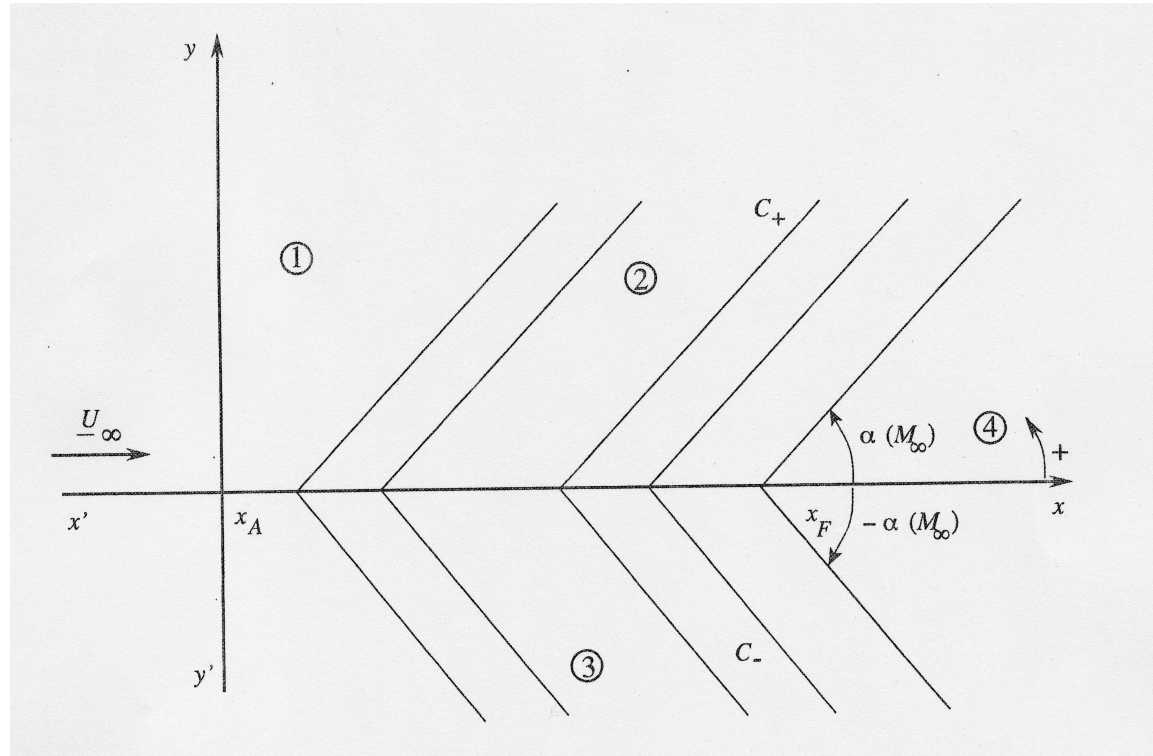
$$\begin{aligned} & \left[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ & + \left[1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ & - 2 \frac{M_\infty}{U_\infty} \left[1 + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Equation approchée du potentiel

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Régime Supersonique: $0 < M_\infty^2 - 1 = O(1)$

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$



$$\varphi(x, y) = a(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}) + b(x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1})$$

Avec les conditions aux limites

$$\varphi(x, y) = -\frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h^+(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}) \text{ dans 2}$$

$$C_{pe}(x) = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

$$\varphi(x, y) = \frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h^-(x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1}) \text{ dans 3}$$

$$C_{pi}(x) = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dh^-}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

Efforts globaux sur le profil

$$h^+(x) = i(x_F - x) + \delta^+(x), \quad i = \alpha\epsilon, \quad \delta^+ = O(\epsilon)$$

$$0 < C_x = \frac{4i^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{2(x_F - x_A)^{-1}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{x_A}^{x_F} \left\{ \left(\frac{d\delta^+}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\delta^-}{dx} \right)^2 \right\} dx$$
$$C_y = \frac{4i}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Récapitulation pour le régime supersonique

$$\varphi = O(\epsilon)$$

$$0 < C_x = O\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right), \quad C_y = O\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)$$

PC7

- Profil en écoulement supersonique

AMPHI 8

- Ecoulements subsoniques linéarisés
 - Ecoulements incompressibles
- Début des écoulements transsoniques