

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

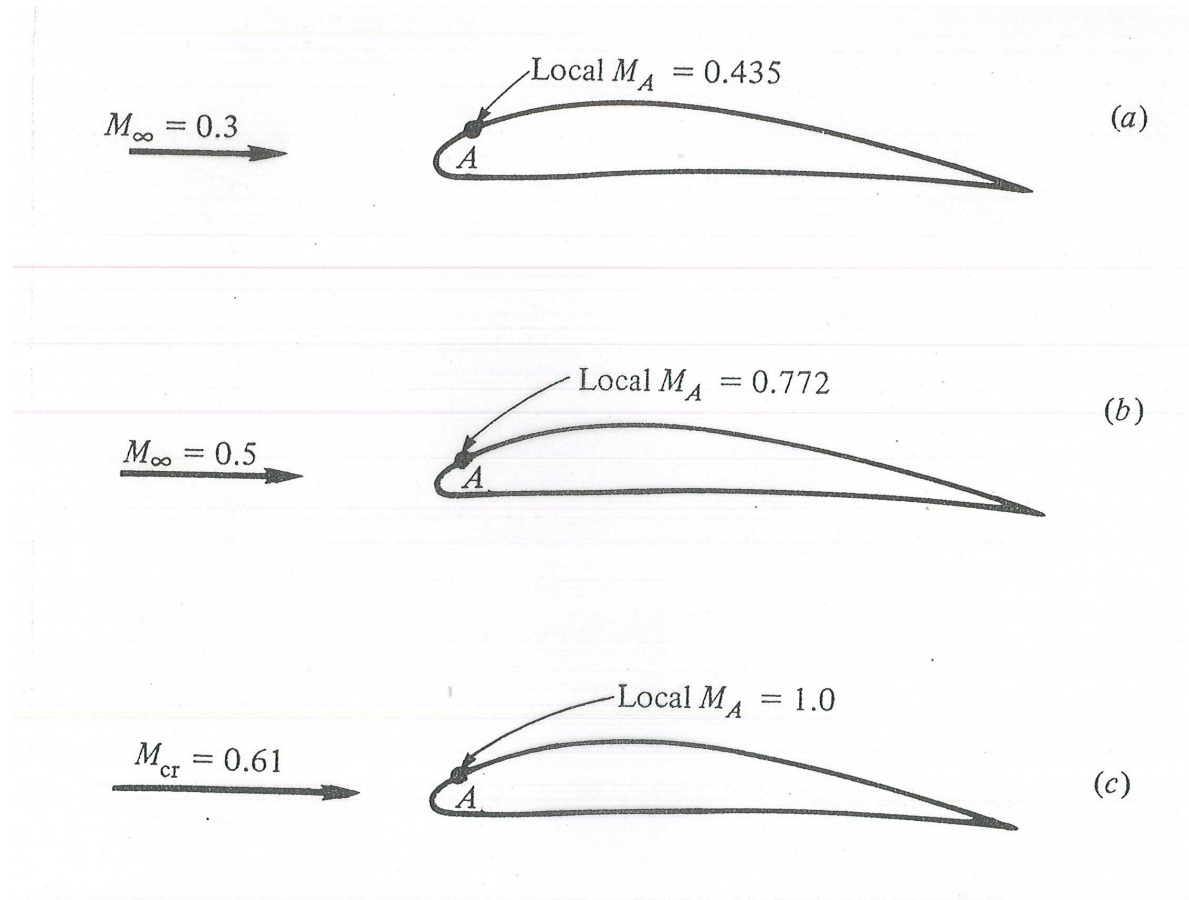
SEANCE 8

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Nature et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs obliques et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan
Profils d’aile

ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT: RÉGIME SUBSONIQUE



ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Rappels

- Hypothèses. Problème pour le potentiel
- Écoulement de perturbation pour un profil d'aile

Régime subsonique linéarisé

- Problème linéarisé pour le potentiel
- Transformation de Prandtl-Glauert
- Coefficient de pression. Similitude
 - Régime faiblement compressible

Ecoulement plan, permanent, potentiel, incompressible (homogène)

- Cas potentiel et incompressible
 - Effort résultant sur un obstacle fixe
 - Introduction des solutions élémentaires
- Relation de Kutta-Joukowski. Paradoxe de d'Alembert
 - Non unicité. Condition de Kutta Joukowski

Méthode de résolution pour un profil mince

- Problèmes d'épaisseur et de cambrure
 - Résolution du problème d'épaisseur
 - Résolution du problème de cambrure
- Exemple d'un segment rectiligne placé en faible incidence

Hypothèses pour un écoulement de perturbation

Discontinuités faibles

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \eta, \quad \frac{s_2 - s_1}{s_1} = O(\eta^{\textcolor{red}{3}})$$

$$|\underline{\text{rot}}(\underline{U})| = O(\eta^{\textcolor{red}{2}})$$

Approximations proposées

- écoulement homoentropique
- écoulement potentiel (car de plus strictement homoénergétique)

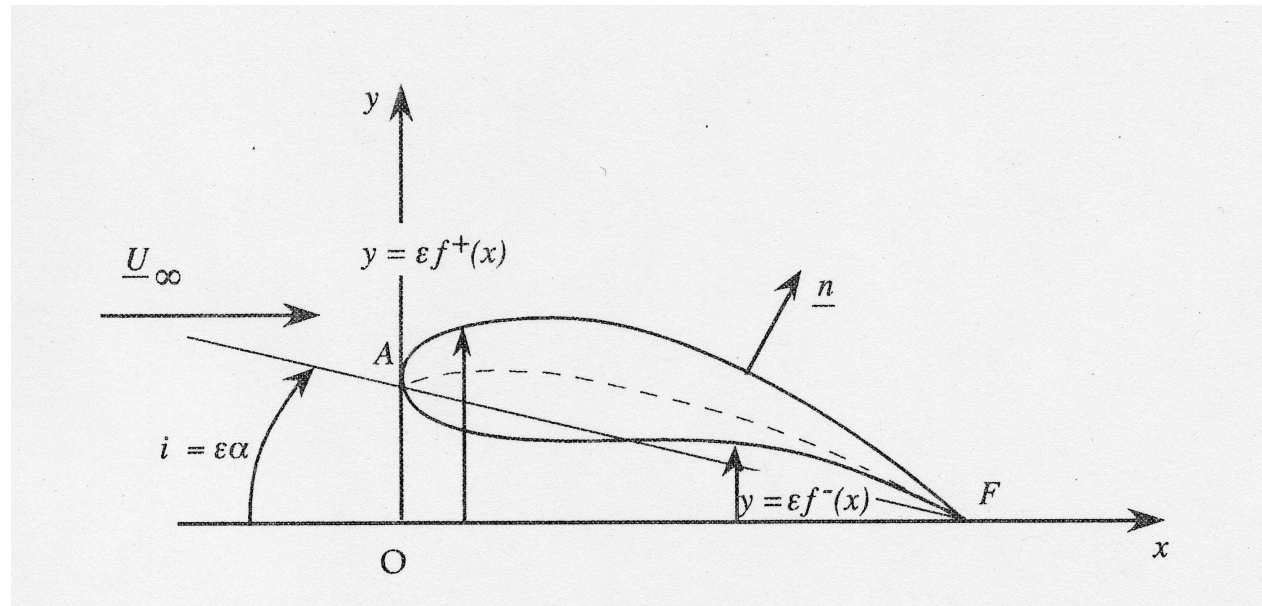
$$\underline{U} = \underline{\text{grad}}[\phi] = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$$

- écoulement continu **de perturbation**

$$\varphi = \phi - U_\infty x, \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]/U_\infty| \ll 1$$

Problème pour l'écoulement de perturbation autour du profil d'aile

$$\underline{U} = U_{\infty} \underline{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_{\infty}$$



$$h^+ = \epsilon f^+, \quad h^- = \epsilon f^-, \quad i = \alpha \epsilon = (y_F - y_A)/(x_A - x_F), \quad \epsilon = e/L$$

Conditions aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_{\infty} \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F, \quad \text{K.J.} : \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0}, \quad x \rightarrow -\infty$$

Cas du gaz parfait polytropique ($\gamma, r = R/\mathcal{M}$)

Problème exact vérifié par $\varphi = \phi - U_\infty x$?

$$\begin{aligned} & [1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ & + [1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ & - 2 \frac{M_\infty}{U_\infty} \left[1 + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

En écoulement de perturbation?

- Vu en séance 7 pour le régime supersonique: $0 < M_\infty^2 - 1 = O(1)$

$$\varphi = O(\epsilon), \quad 0 < C_x = O\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right), \quad C_y = O\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)$$

- Autres régimes?

Obtention des efforts sur le profil?

En général

$$\underline{R} = R_x \underline{e}_x + R_y \underline{e}_y = - \oint_{\mathcal{C}} p \underline{n} dl, \quad C_p(P) = \frac{p(P) - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}$$

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 (x_F - x_A)}, \quad C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 (x_F - x_A)}$$

En écoulement de perturbation

$$C_p(P) = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P)$$

$$C_x = \frac{1}{x_F - x_A} \int_{x_A}^{x_F} \left[C_{pe}(x) \frac{dh^+}{dx} - C_{pi}(x) \frac{dh^-}{dx} \right] dx$$

$$C_y = -\frac{1}{x_F - x_A} \int_{x_A}^{x_F} [C_{pe}(x) - C_{pi}(x)] dx$$

ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

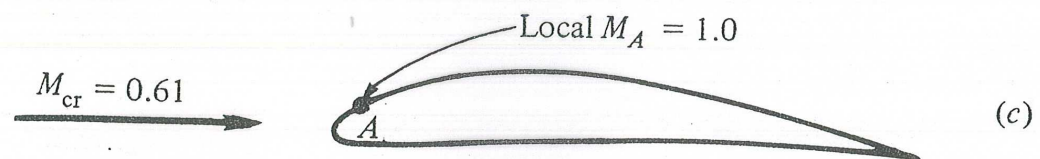
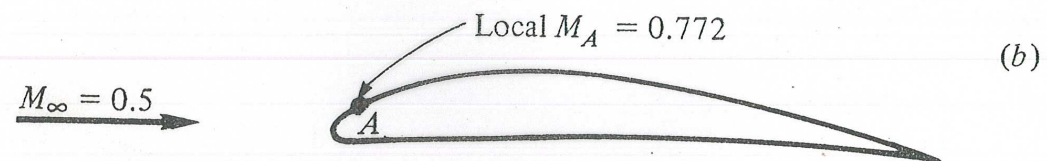
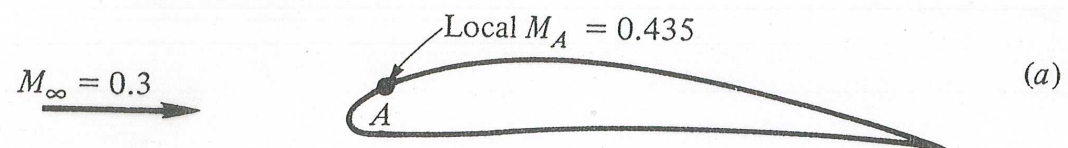
Chapitre 7

Rappels

- Hypothèses. Problème pour le potentiel
- Écoulement de perturbation pour un profil d'aile

Régime subsonique linéarisé

- Problème linéarisé pour le potentiel
- Transformation de Prandtl-Glauert
- Coefficient de pression. Similitude
 - Régime faiblement compressible



Régime subsonique: $0 < 1 - M_\infty^2 = O(1)$

Equation différentielle

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Conditions aux limites associées

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0} \quad \text{si } x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_\infty \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

Coefficient de pression en $P(x, y)$

$$C_p(P) = C_p^{M_\infty}(P) = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$$

Transformation de Prandtl-Glauert

$$\lambda = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

$$x' = x, \quad y' = \lambda y, \quad \varphi'(x', y') = \lambda \varphi(x, y)$$

Problème 'incompressible' obtenu pour φ'

$$\Delta \varphi' = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} = 0, \quad \mathbb{R}^2 \setminus [x_A, x_F]$$

$$\underline{\text{grad}}[\varphi'] \rightarrow \underline{0} \quad \text{si} \quad x' \rightarrow -\infty$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}(x', 0^\pm) = U_\infty \frac{dh^\pm}{dx'}(x'), \quad x_A \leq x' \leq x_F$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x_F, 0^-)$$

Coefficient de pression en $P'(x', y')$

$$C_p^{\text{inc}}(P') = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x', y')$$

Conséquences de Prandtl-Glauert?

Au point $P(x, y)$ on associe $P'(x', y')$ avec

$$x' = x, \quad y' = \lambda y, \quad \varphi'(x', y') = \lambda \varphi(x, y), \quad \lambda = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Lien entre les coefficients de pression

$$C_p^{M_\infty}(P) = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad C_p^{\text{inc}}(P') = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \quad C_p(P) = \frac{C_p^{\text{inc}}(P')}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

Pour deux écoulements subsoniques linéarisés

$$0 < 1 - M_1^2 = O(1) \quad \text{et} \quad 0 < 1 - M_2^2 = O(1)$$

$$C_p^{M_1}(x_1, y_1) = \sqrt{\frac{1 - M_2^2}{1 - M_1^2}} C_p^{M_2}(x_1, y_2)$$

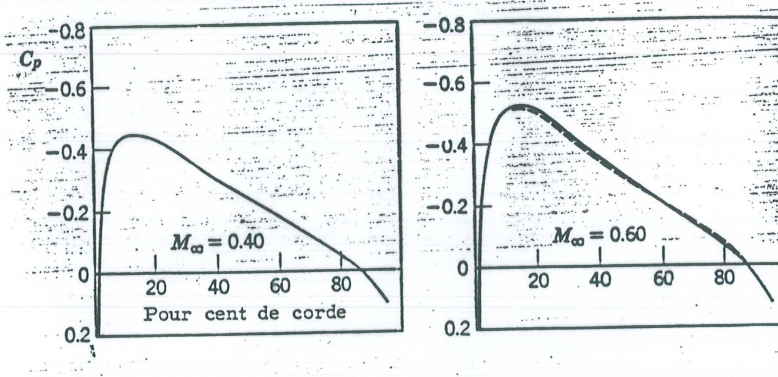
$$y_2 \sqrt{1 - M_2^2} = y_1 \sqrt{1 - M_1^2}$$

Loi de similitude

$$0 < 1 - M_1^2 = O(1) \text{ et } 0 < 1 - M_2^2 = O(1)$$

$$C_p^{M_1}(P) = \sqrt{\frac{1 - M_2^2}{1 - M_1^2}} C_p^{M_2}(P)$$

Illustration



ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Rappels

- Hypothèses. Problème pour le potentiel
- Écoulement de perturbation pour un profil d'aile

Régime subsonique linéarisé

- Problème linéarisé pour le potentiel
- Transformation de Prandtl-Glauert
- Coefficient de pression. Similitude
 - Régime faiblement compressible

Caractère compressible d'un écoulement permanent,
isentropique (sans forces volumiques)

$$\underline{\text{grad}}[\rho].\underline{U} + \rho \text{div}(\underline{U}) = 0$$

$$\underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}\left[\frac{U^2}{2}\right] + \frac{1}{\rho}\underline{\text{grad}}[p] = \underline{0}$$

$$\underline{\text{grad}}[s].\underline{U} = 0, \quad \underline{\text{grad}}[p].\underline{U} = c^2 \underline{\text{grad}}[\rho].\underline{U}$$

Sur une trajectoire

$$dp_{C_o} = c^2 d\rho_{C_o}, \quad \rho U dU_{C_o} + dp_{C_o} = 0, \quad \frac{1}{\rho} d\rho_{C_o} + M^2 \frac{dU_{C_o}}{U} = 0$$

Cas faiblement compressible (incompressible)

$$M \ll 1(=0), \quad d\rho/\rho \ll 1(=0)$$

Cas de l'écoulement homogène ($\rho = \rho_\infty$ partout)

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty(U_\infty^2 - U^2), \quad C_p = \frac{p(P) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = 1 - \frac{U^2}{U_\infty^2}$$

Ecoulement plan, permanent, potentiel, incompressible (homogène)

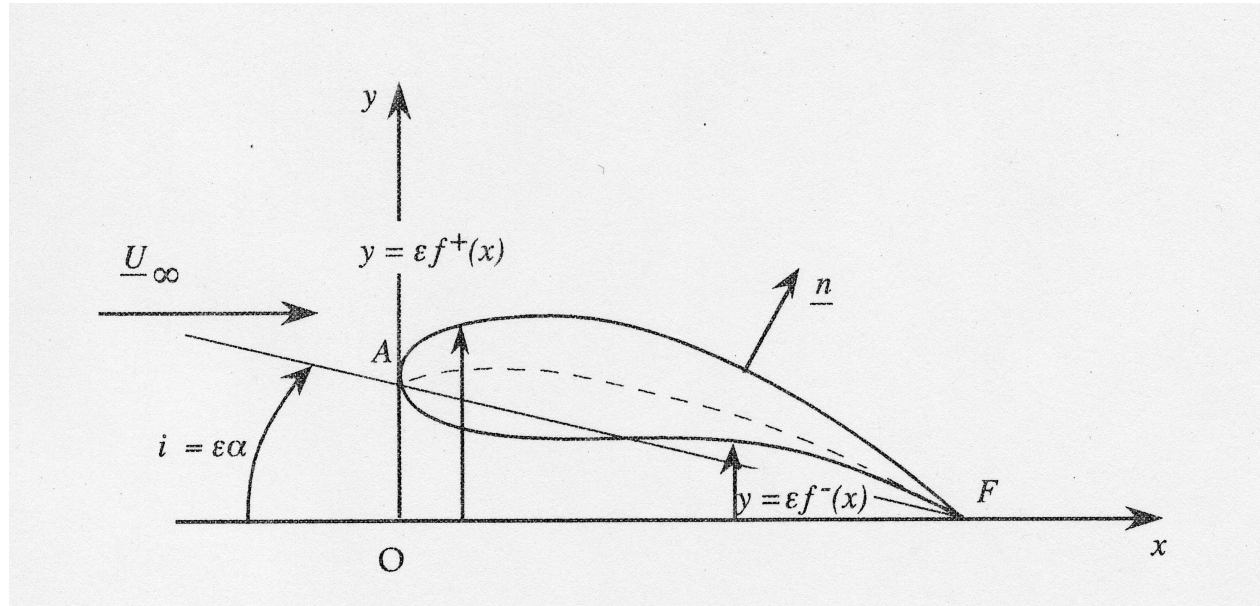
- Cas potentiel et incompressible
- Effort résultant sur un obstacle fixe
- Introduction des solutions élémentaires
- Relation de Kutta-Joukowski. Paradoxe de d'Alembert
- Non unicité. Condition de Kutta Joukowski

Méthode de résolution pour un profil mince

- Problèmes d'épaisseur et de cambrure
 - Résolution du problème d'épaisseur
 - Résolution du problème de cambrure
- Exemple d'un segment rectiligne placé en faible incidence

Problème de l'écoulement linéarisé incompressible

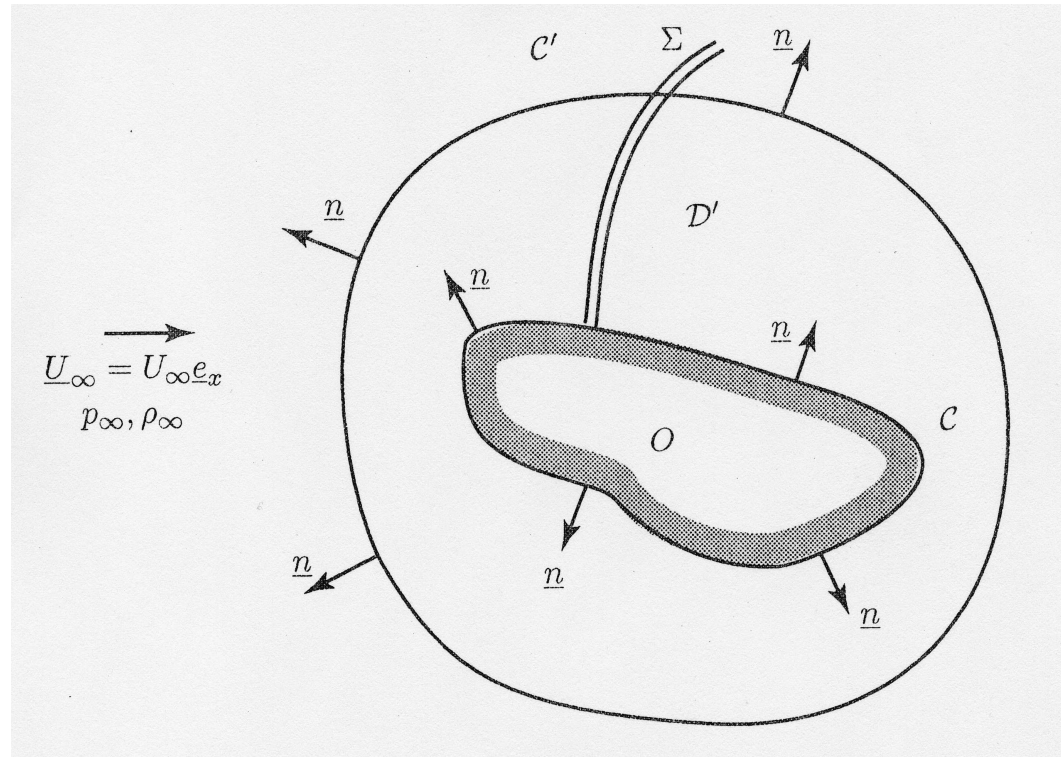
$$\underline{U} = U_{\infty} \underline{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_{\infty}$$



$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus [x_A, x_F], \quad \underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0} \text{ si } x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_{\infty} \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F, \quad \text{K.J : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

Expression alternative de la résultante des efforts

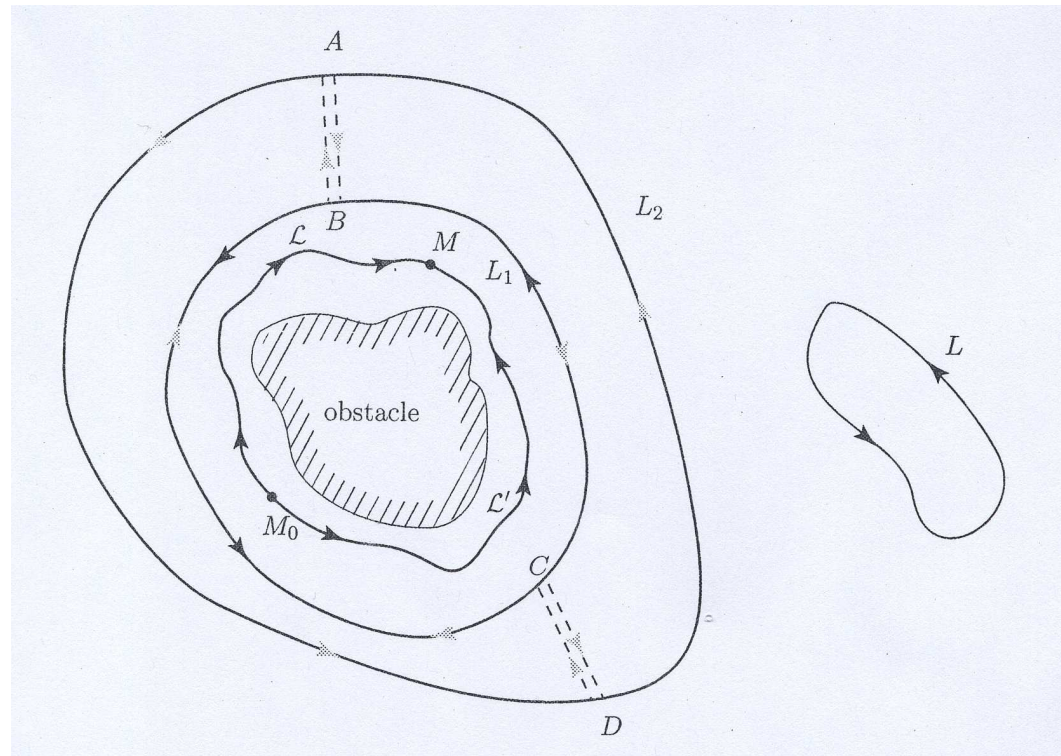


$$\int_{D'} \{p \underline{n}' + \rho(\underline{u} \cdot \underline{n}') \underline{u}\} da = \underline{0}$$

$$\underline{R} = - \oint_{C'} \{p \underline{n} + \rho(\underline{U} \cdot \underline{n}) \underline{U}\} dl$$

Besoin du comportement de $(\underline{U}, p, \rho)$ loin du profil

Différents contours dans le plan



Circulation le long d'un contour fermé L : $\Gamma_L = \oint_L \underline{U} \cdot \underline{dl}$

- Si L homotope à un point: $\Gamma_L = 0$.
- Si L irréductible (à une boucle): $\Gamma_{L_1} = \Gamma_{L_2}$
- ϕ n'est pas unique! $\phi_{\mathcal{L}'} - \phi_{\mathcal{L}} = \oint_{L_1} \underline{U} \cdot \underline{dl}$

Résolution du problème incompressible?

- problème linéaire
- méthode de superposition

Solutions élémentaires de l'équation de Laplace?

- $\varphi = F(r)G(\theta)$ harmonique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$
- $\varphi = r^{\pm n} \cos(n\theta), \quad \varphi = r^{\pm n} \sin(n\theta), \quad n \geq 1$
 - source ponctuelle en O

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \log r, \quad \underline{U} = \frac{q}{2\pi r} \underline{e}_r, \quad \Gamma_L = 0$$

- tourbillon ponctuel en O

$$\varphi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi}, \quad \underline{U} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta, \quad \Gamma_L = \Gamma$$

Relation de Kutta-Joukowski et paradoxe de d'Alembert

Ecoulement incompressible (homogène)

$$p = p_{\infty} + \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2}{2} \left(1 - \frac{U^2}{U_{\infty}^2}\right), \quad \phi = U_{\infty} x + \varphi$$

Comportements asymptotiques si $r \rightarrow \infty$

$$2\pi\varphi = q \log r + \Gamma\theta + O(1/r)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_{\infty} + \frac{1}{2\pi r} [q \underline{e}_r + \Gamma \underline{e}_{\theta}] + O(1/r^2)$$

$$p = p_{\infty} - \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}}{2\pi r} [q \cos \theta + \Gamma \sin \theta] + O(1/r^2)$$

$$\underline{R} = -\rho_{\infty} U_{\infty} \Gamma \underline{e}_y \quad (\text{Kutta} - \text{Joukowski})$$

Ecoulement plan, permanent, potentiel, incompressible (homogène)

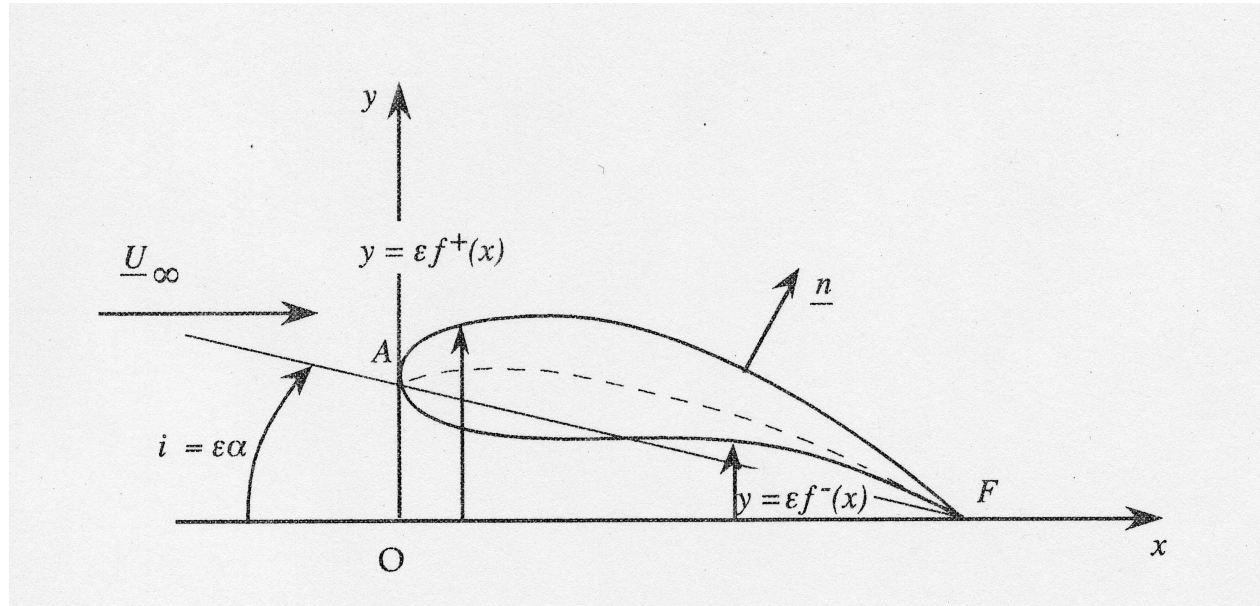
- Cas potentiel et incompressible
- Effort résultant sur un obstacle fixe
- Introduction des solutions élémentaires
- Relation de Kutta-Joukowski. Paradoxe de d'Alembert
- Non unicité. Condition de Kutta Joukowski

Méthode de résolution pour un profil mince

- Problèmes d'épaisseur et de cambrure
 - Résolution du problème d'épaisseur
 - Résolution du problème de cambrure
- Exemple d'un segment rectiligne placé en faible incidence

Problème de l'écoulement linéarisé incompressible

$$\underline{U} = U_{\infty} \underline{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_{\infty}$$



$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus [x_A, x_F], \quad \underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0} \text{ si } x \rightarrow -\infty$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_{\infty} \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F, \quad \text{K.J.} : \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

Résolution pour un profil mince en faible incidence?

Fonctions d'épaisseur f et de cambrure g

$$f = \frac{h^+ - h^-}{2}, \quad g = \frac{h^+ + h^-}{2}$$

Problème d'épaisseur de potentiel φ_e

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}(x, 0^\pm) = \pm U_\infty \frac{df}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

Les symétries montrent que $C_y = 0$ (avec $C_x = 0$)

Problème de cambrure de potentiel φ_c

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial y}(x, 0^\pm) = U_\infty \frac{dg}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

Résolution par des sources du problème d'épaisseur

$$\varphi_e(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_A}^{x_F} \frac{q(x')}{2} \log[(x - x')^2 + y^2] dx'$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_A}^{x_F} \frac{(x - x')q(x')dx'}{(x - x')^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_A}^{x_F} \frac{yq(x')dx'}{(x - x')^2 + y^2}$$

Composantes de la vitesse sur le profil?

$$u(x, 0_{-}^{+}) = \text{vp} \int_{x_A}^{x_F} \frac{q(x')dx'}{2\pi(x - x')}, \quad v(x, 0_{-}^{+}) = \pm \frac{q(x)}{2}$$

$$\text{vp} \int_a^b f(x')dx' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^b \right] f(x')dx'$$

Solution obtenue

$$\frac{q}{2U_{\infty}} = \frac{df}{dx}, \quad C_p(x, 0_{-}^{+}) = -\frac{2}{\pi} \text{vp} \int_{x_A}^{x_F} \frac{df}{dx}(x') \frac{dx'}{x - x'}$$

Résolution par des tourbillons du problème de cambrure

$$\varphi_c = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{2\pi} \int_{x_A}^{x_F} \gamma(x') \arccos\left[\frac{x - x'}{(x - x')^2 + y^2}\right] dx'$$

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_A}^{x_F} \frac{y\gamma(x') dx'}{(x - x')^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_A}^{x_F} \frac{(x - x')\gamma(x') dx'}{(x - x')^2 + y^2}$$

Composantes de la vitesse sur le profil?

$$v(x, 0_{-}^{+}) = \operatorname{vp} \int_{x_A}^{x_F} \frac{\gamma(x') dx'}{2\pi(x - x')}, \quad u(x, 0_{-}^{+}) = \mp \frac{\gamma(x)}{2}$$

K. J. impose $\gamma(x_F) = 0$ et équation intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{vp} \int_{x_A}^{x_F} \frac{\gamma(x') dx'}{(x - x')} = U_{\infty} \frac{dg}{dx}, \quad \gamma(x_F) = 0$$

Obtention de γ (polycopié!) et

$$C_p(x, 0_{-}^{+}) = \pm \frac{\gamma(x)}{U_{\infty}}, \quad C_{pe}(x) = -C_{pi}(x) = \frac{\gamma(x)}{U_{\infty}}$$

Cas d'un segment en faible incidence i

$$h^{+}(x) = h^{-}(x) = i(x_F - x), \quad f = 0, \quad g = h^{+}$$

$$\gamma(x) = -2U_{\infty}i\sqrt{\frac{x_F - x}{x - x_A}}$$

$$C_p(x, 0_{-}^{+}) = \mp 2i\sqrt{\frac{x_F - x}{x - x_A}}$$

Circulation Γ et coefficient de portance

$$\Gamma = -\pi \textcolor{red}{i}(x_F - x_A)U_{\infty}, \quad C_y = 2\pi \textcolor{red}{i}$$

PC8

- Numérique et théorique

Profil mince en écoulement subsonique et nombre de Mach critique

AMPHI 9

- Ecoulements transsoniques