

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

SEANCE 9

AERODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

COMPRESSIBILITE, DISCONTINUITES, SECOND PRINCIPE

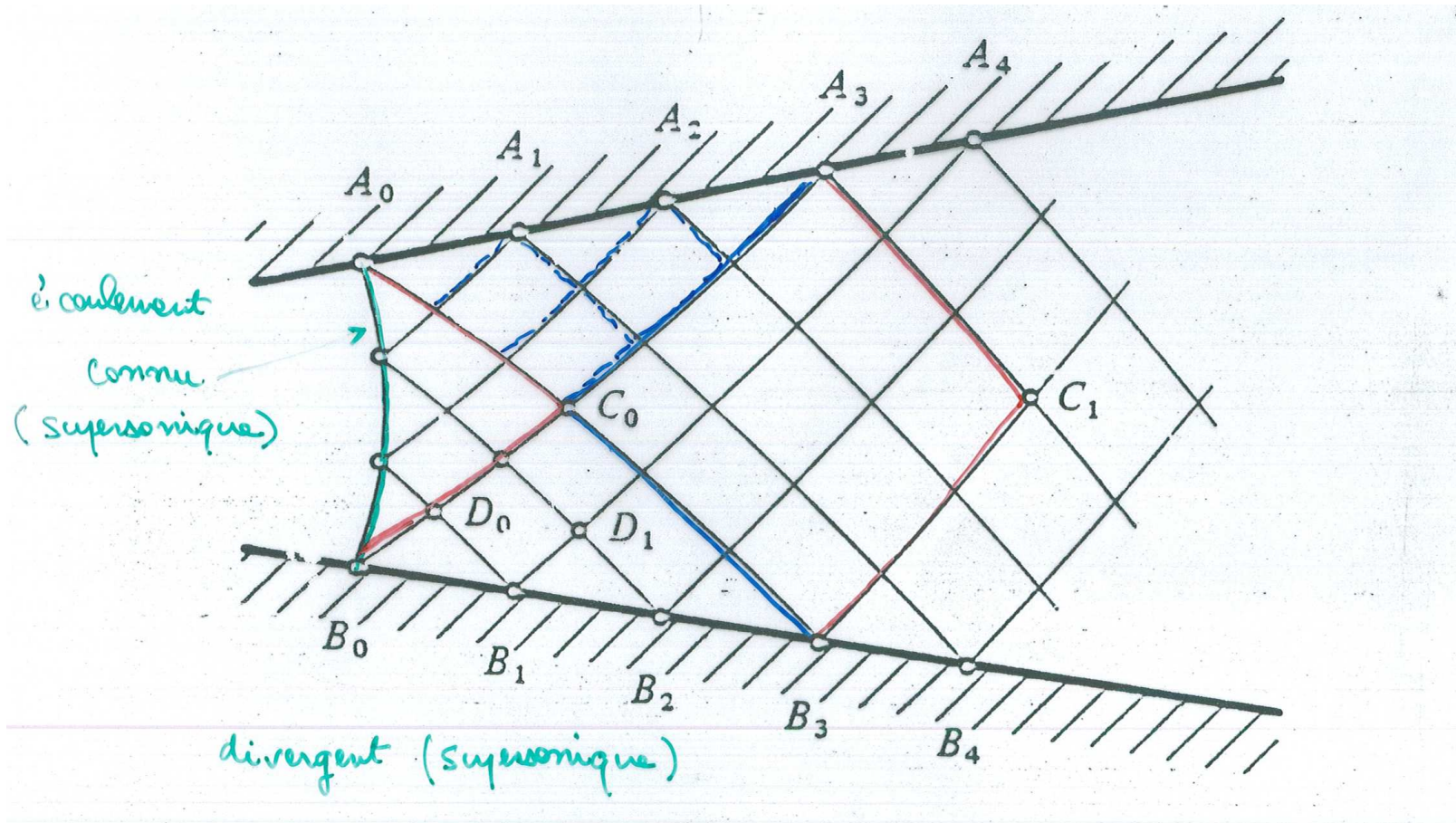
- Modélisation. Lois de la Physique du Fluide.
Ecoulement compressible, “unidimensionnel” et continu
- Nature et propriétés des surfaces de discontinuités.
Choc droit. Chocs obliques et courbes
- Ecoulement compressible, “unidimensionnel”,
instationnaire et continu
 - Ecoulement compressible plan
- Ecoulement permanent, de perturbation et plan
Profils d’aile

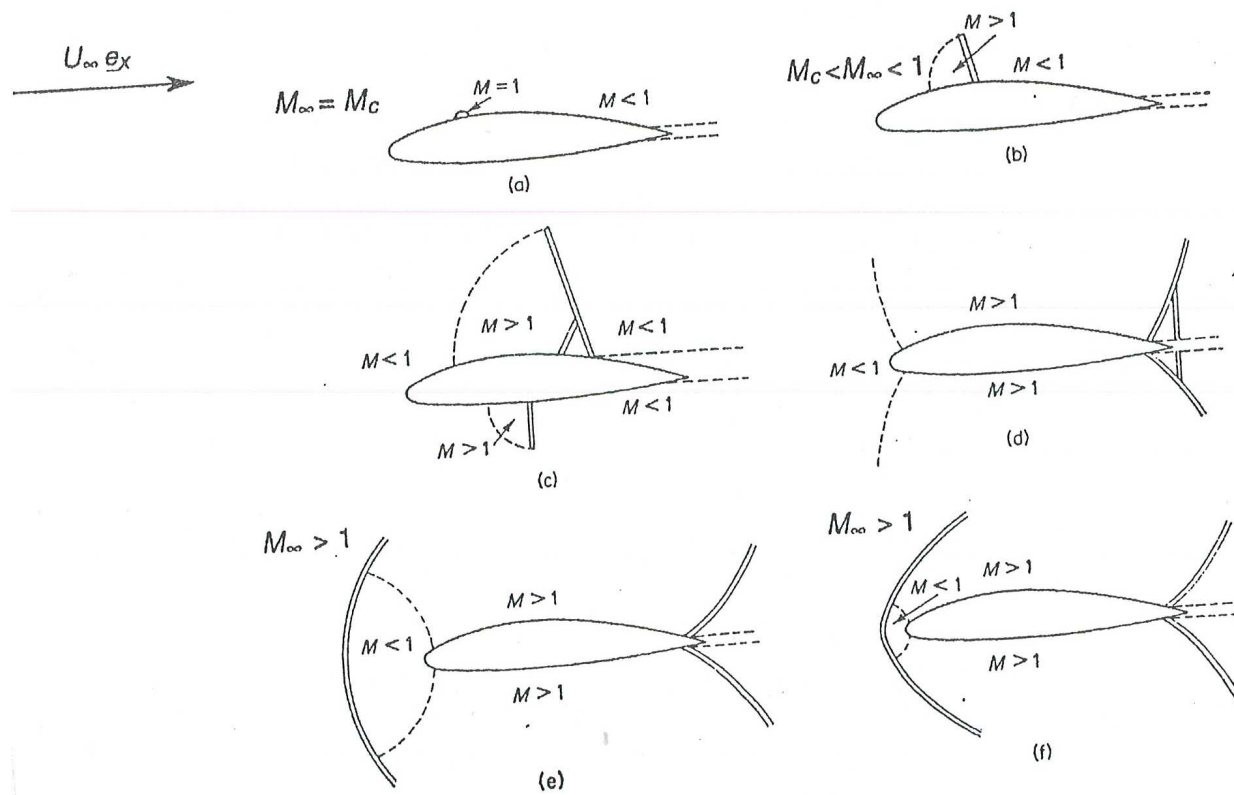
ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

Régime transsonique

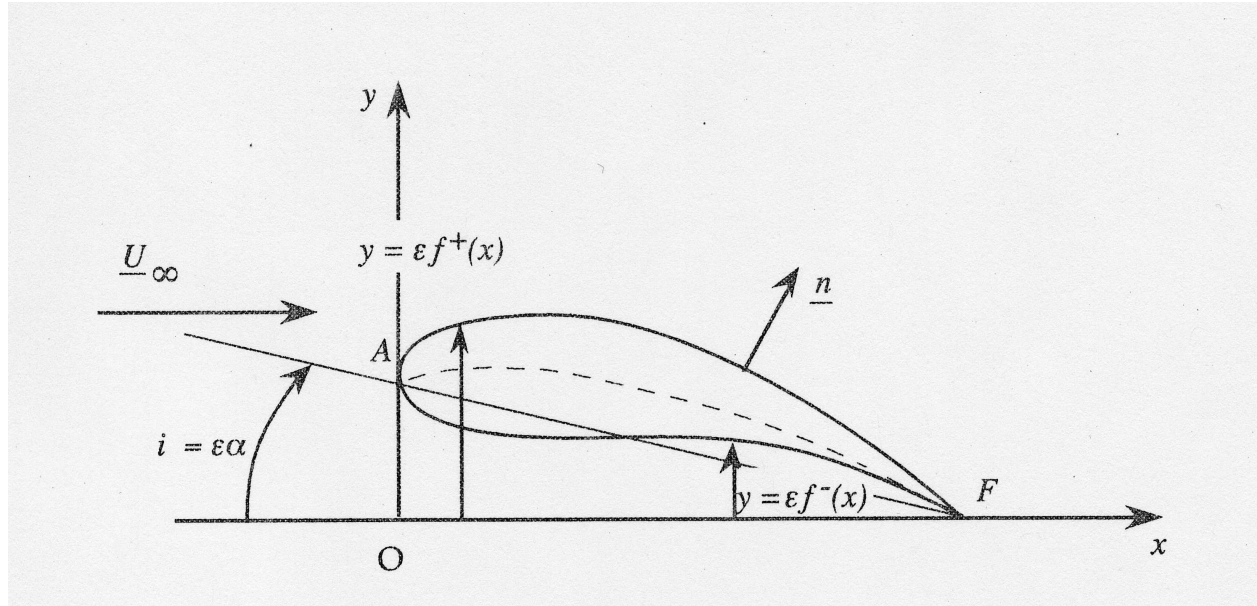
- Exemples
- Problème approché
- Nature du système. Courbes caractéristiques
 - Solutions semblables
 - Lois de similitude sous-jacentes





Problème pour l'écoulement de perturbation autour du profil d'aile

$$\underline{U} = U_{\infty} \underline{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_{\infty}$$



$$h^+ = \epsilon f^+, \quad h^- = \epsilon f^-, \quad i = \alpha \epsilon = (y_F - y_A)/(x_A - x_F), \quad \epsilon = e/L$$

Conditions aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_{\infty} \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F, \quad \text{K.J : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0}, \quad x \rightarrow -\infty$$

Cas du gaz parfait polytropique ($\gamma, r = R/\mathcal{M}$)

Problème exact vérifié par $\varphi = \phi - U_\infty x$?

$$\begin{aligned} & [1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ & + [1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ & - 2 \frac{M_\infty}{U_\infty} \left[1 + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

En écoulement de perturbation?

- Vu en séance 7 pour le régime supersonique: $0 < M_\infty^2 - 1 = O(1)$

$$\varphi = O(\epsilon), \quad 0 < C_x = O(\epsilon^2 / \sqrt{M_\infty^2 - 1}), \quad C_y = O(\epsilon / \sqrt{M_\infty^2 - 1})$$

- Vu en séance 8 pour le régime subsonique: $0 < 1 - M_\infty^2 = O(1)$

$$\varphi = O(\epsilon), \quad C_x = 0, \quad C_y = O(\epsilon / \sqrt{M_\infty^2 - 1})$$

- Régime transsonique: $0 < |1 - M_\infty^2| = o(1)$

Régime transsonique: $0 < |1 - M_\infty^2| = o(1)$

Problème différentiel à résoudre

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_\infty \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F$$

$$\text{K.J. : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0}, \quad x \rightarrow -\infty$$

Présentation alternative (système quasi-linéaire (homogène))

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} u] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Méthode des caractéristiques

Discussion sur M local

$$M^2 = \frac{U^2}{c^2} = \frac{(U_\infty + u)^2 + v^2}{c^2}$$

Si $M < 1$: pas de caractéristiques (elliptique)

Si $M > 1$: 2 familles (hyperbolique)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C^\pm} = \pm \left\{(\gamma + 1)\frac{M_\infty^2}{U_\infty}u + M_\infty^2 - 1\right\}^{-1/2}$$

avec le lien

$$1 - \frac{1}{M_\infty^2} + (\gamma + 1)\frac{u}{U_\infty} = \frac{M^2 - 1}{M^2}\left[1 + \frac{2u}{U_\infty}\right]$$

Invariants de Riemann

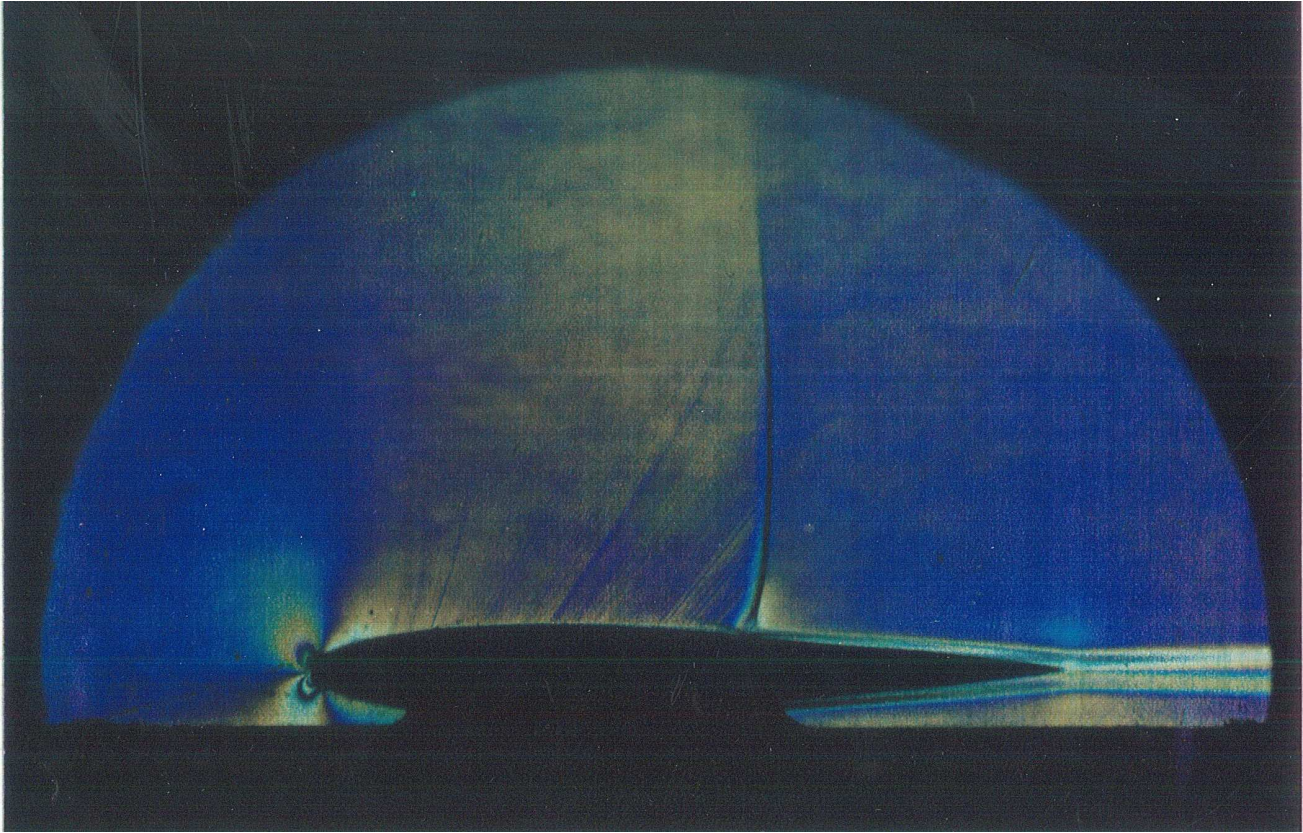
$$J_{\pm} = \left\{(\gamma + 1)\frac{M_\infty^2}{U_\infty}u + M_\infty^2 - 1\right\}^{3/2} \mp \frac{3}{2}(\gamma + 1)M_\infty^2 \frac{v}{U_\infty}$$

ÉCOULEMENT DE PERTURBATION COMPRESSIBLE, PLAN, PERMANENT

Chapitre 7

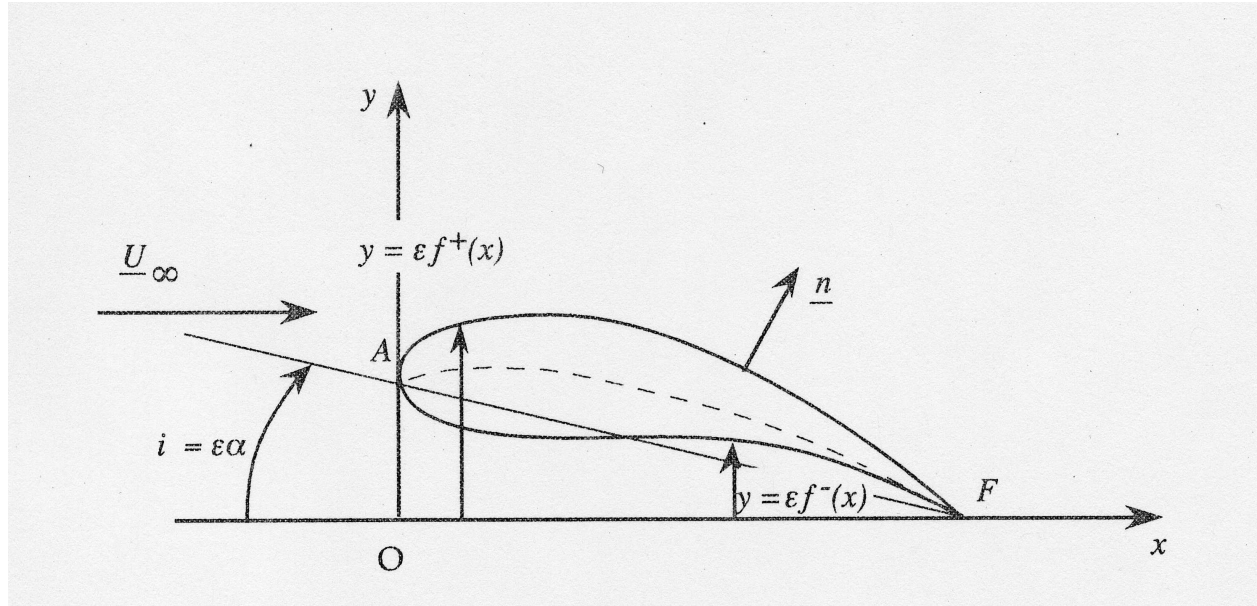
Régime transsonique

- Problème approché
- Nature du système. Courbes caractéristiques
 - Solutions semblables
 - Lois de similitude sous-jacentes



Problème pour l'écoulement de perturbation autour du profil d'aile

$$\underline{U} = U_{\infty} \underline{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_{\infty}$$



$$h^+ = \epsilon f^+, \quad h^- = \epsilon f^-, \quad i = \alpha \epsilon = (y_F - y_A)/(x_A - x_F), \quad \epsilon = e/L$$

Conditions aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0^+) = U_{\infty} \frac{dh^+}{dx}(x), \quad x_A \leq x \leq x_F, \quad \text{K.J : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_F, 0^-)$$

$$\underline{\text{grad}}[\varphi] \rightarrow \underline{0}, \quad x \rightarrow -\infty$$

Lois de similitude

$$h^+ = eh'^+, \quad h^- = eh'^-, \quad x_F - x_A = l$$

- Changement d'échelle

$$x = lx', \quad y = y^*y', \quad h^\pm = eh'^\pm, \quad \varphi(x, y) = U_\infty \varphi^* \varphi'(x', y')$$

- Nouveau problème différentiel

$$\frac{(y^*)^2 \varphi^*}{l^3} (\gamma + 1) M_\infty^2 \left[\frac{1 - M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi^*} \frac{l}{\partial x'} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right] \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}(x', 0^\pm) = \frac{e y^*}{l \varphi^*} \frac{dh'^\pm}{dx'}(x'), \quad x'_A \leq x' \leq x'_F$$

$$\text{K.J. : } \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x'_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x'_F, 0^-)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x', y') \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}(x', y') \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini amont}$$

Choix pour avoir un seul problème?

$$\frac{e y^*}{l \varphi^*} = 1, \quad \frac{(y^*)^2 \varphi^*}{l^3} (\gamma + 1) M_\infty^2 = 1$$

● Problème obtenu

$$-\left[K + \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right] \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}(x', 0^+) = \frac{dh'^+}{dx'}(x'), \quad x'_A \leq x' \leq x'_F$$

$$\text{K.J. : } \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x'_F, 0^+) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x'_F, 0^-)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}(x', y') \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}(x', y') \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini}$$

● Solution $\varphi'(x', y')$ qui dépend seulement de

$$K = \frac{M_\infty^2 - 1}{[(\gamma + 1) M_\infty^2 (\frac{e}{l})]^{2/3}}, \quad h'^-, \quad h'^+$$

Conséquences théoriques

$$\varphi(x, y) = U_{\infty} l \left(\frac{e}{l} \right)^{2/3} [(\gamma + 1) M_{\infty}^2]^{-1/3} \\ \times \mathcal{F} \left(\frac{x}{l}, [(\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{e}{l}]^{1/3} \frac{y}{l}; h'^+, h'^-, K \right)$$

- pression au sein du fluide?

$$C_p(P) = \frac{p(P) - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2} \sim - \frac{2}{U_{\infty}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P)$$

Ainsi

$$C_p(x, y) = \frac{\epsilon^{2/3}}{[(\gamma + 1) M_{\infty}^2]^{1/3}} A \left(\frac{x}{l}, [(\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{e}{l}]^{1/3} \frac{y}{l}; h'^+, h'^-, K \right)$$

Conséquences théoriques

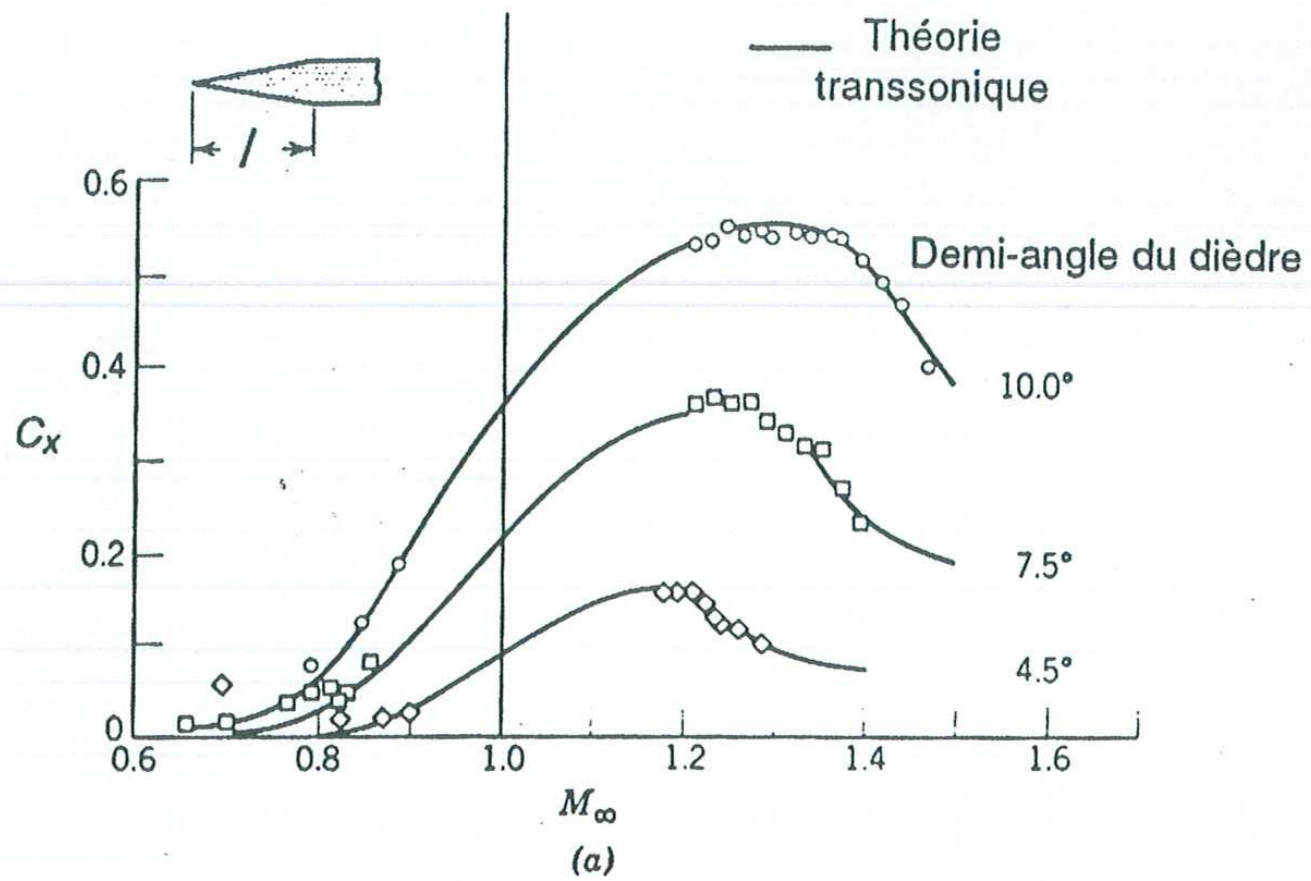
$$C_x = \frac{1}{x_F - x_A} \int_{x_A}^{x_F} \left[C_{pe}(x) \frac{dh^+}{dx} - C_{pi}(x) \frac{dh^-}{dx} \right] dx$$

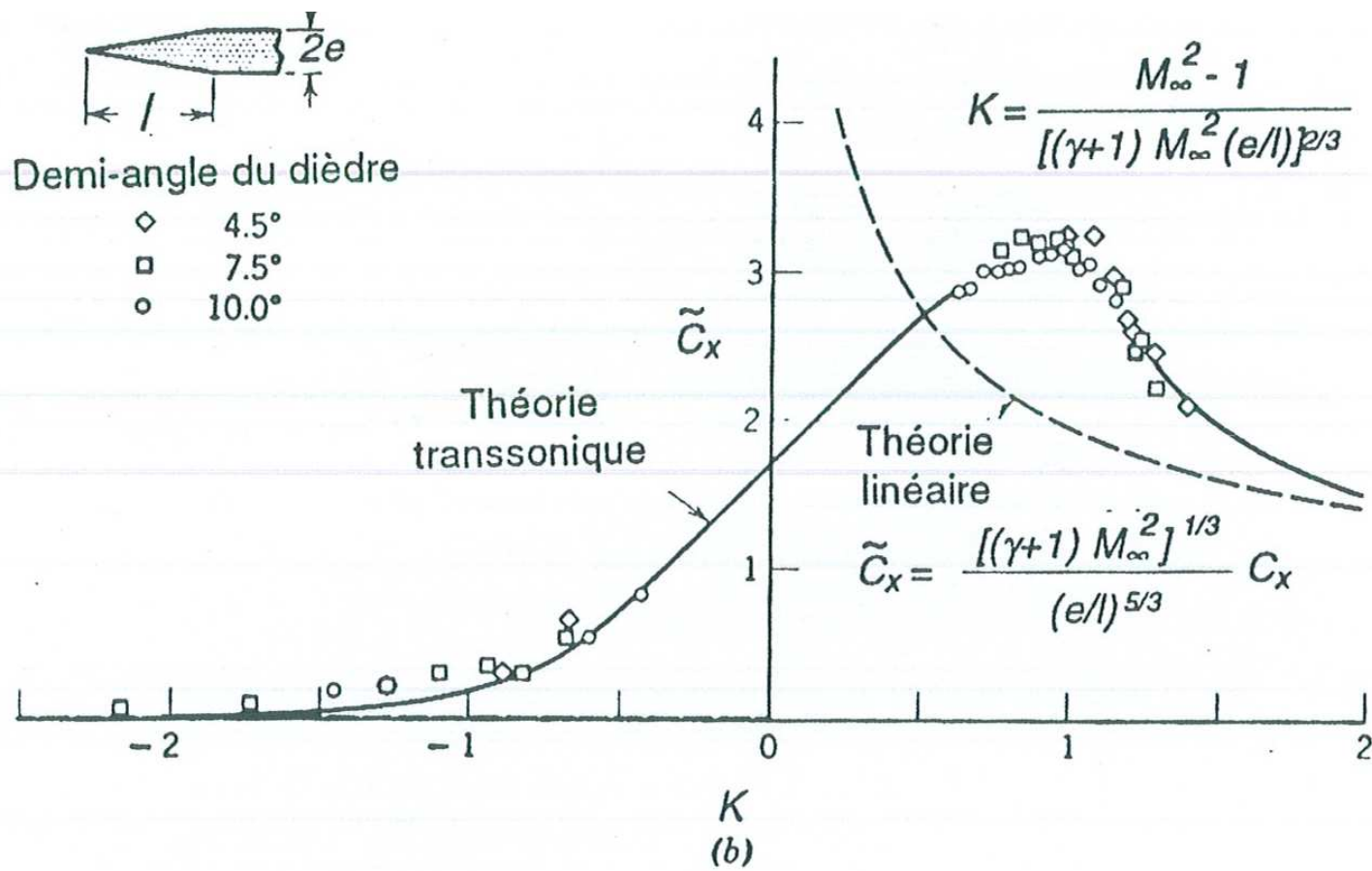
$$C_y = -\frac{1}{x_F - x_A} \int_{x_A}^{x_F} [C_{pe}(x) - C_{pi}(x)] dx$$

Ainsi (avec $h^+ = eh'^+_{-}$)

$$C_x = \frac{\epsilon^{5/3}}{[(\gamma + 1)M_\infty^2]^{1/3}} A_x(h'^+, h'^-, K)$$

$$C_y = \frac{\epsilon^{2/3}}{[(\gamma + 1)M_\infty^2]^{1/3}} A_y(h'^+, h'^-, K)$$





(b)

Synthèse pour les différents régimes

Profil mince en faible incidence i

$$h^+ = O(e), \quad x_F - x_A = l, \quad \epsilon = e/l \ll 1, \quad i = O(\epsilon)$$

$$\mathbf{U} = U_\infty \mathbf{e}_x + \underline{\text{grad}}[\varphi], \quad |\underline{\text{grad}}[\varphi]| \ll U_\infty$$

$$\text{Cas subsonique pour } 0 < 1 - M_\infty^2 = O(1)$$

$$\frac{\varphi}{U_\infty l} = O(\epsilon), \quad C_x = 0, \quad C_y = O(\epsilon)$$

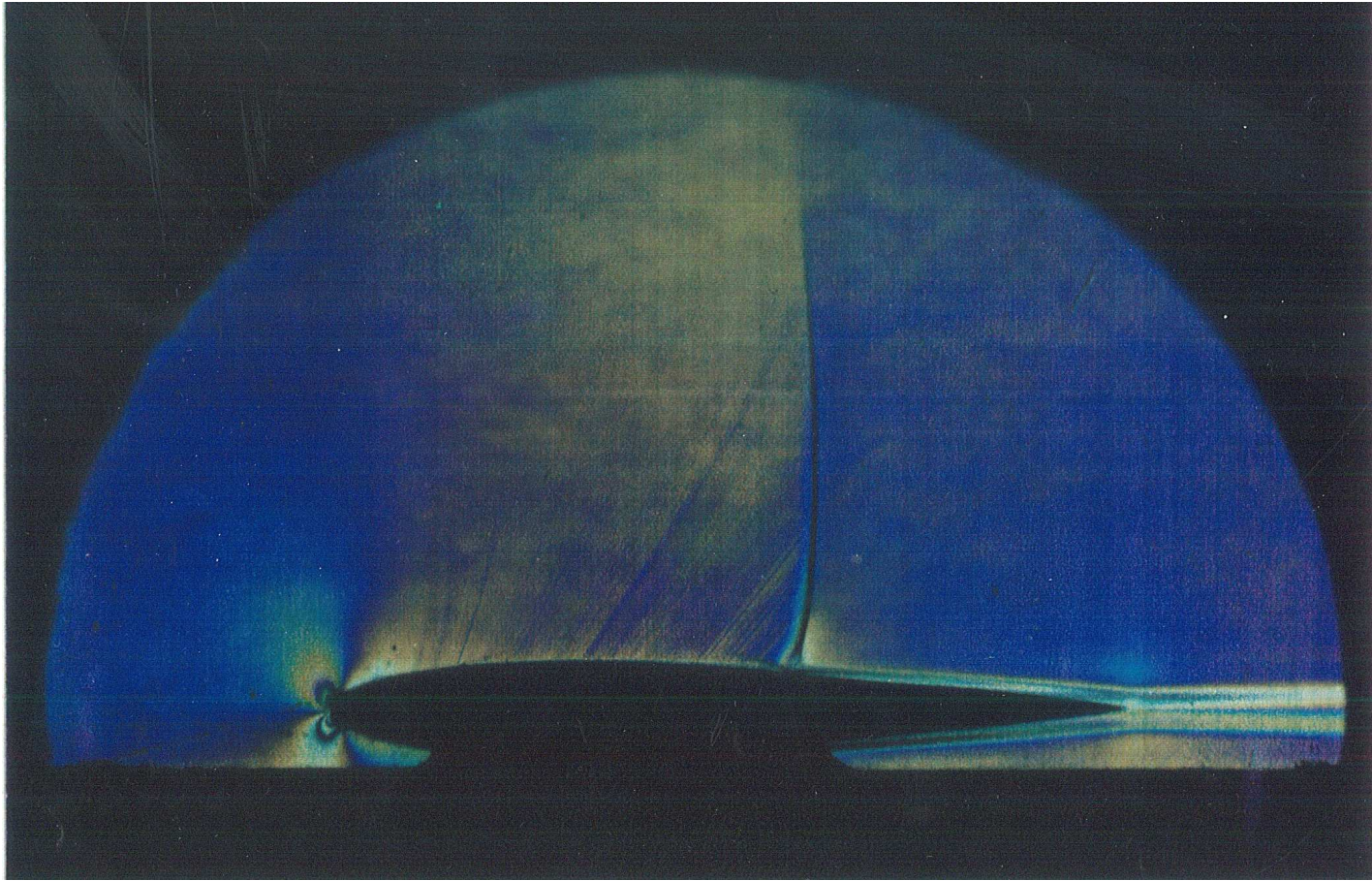
$$\text{Cas supersonique pour } 0 < M_\infty^2 - 1 = O(1)$$

$$\frac{\varphi}{U_\infty l} = O(\epsilon), \quad C_x = O(\epsilon^2), \quad C_y = O(\epsilon)$$

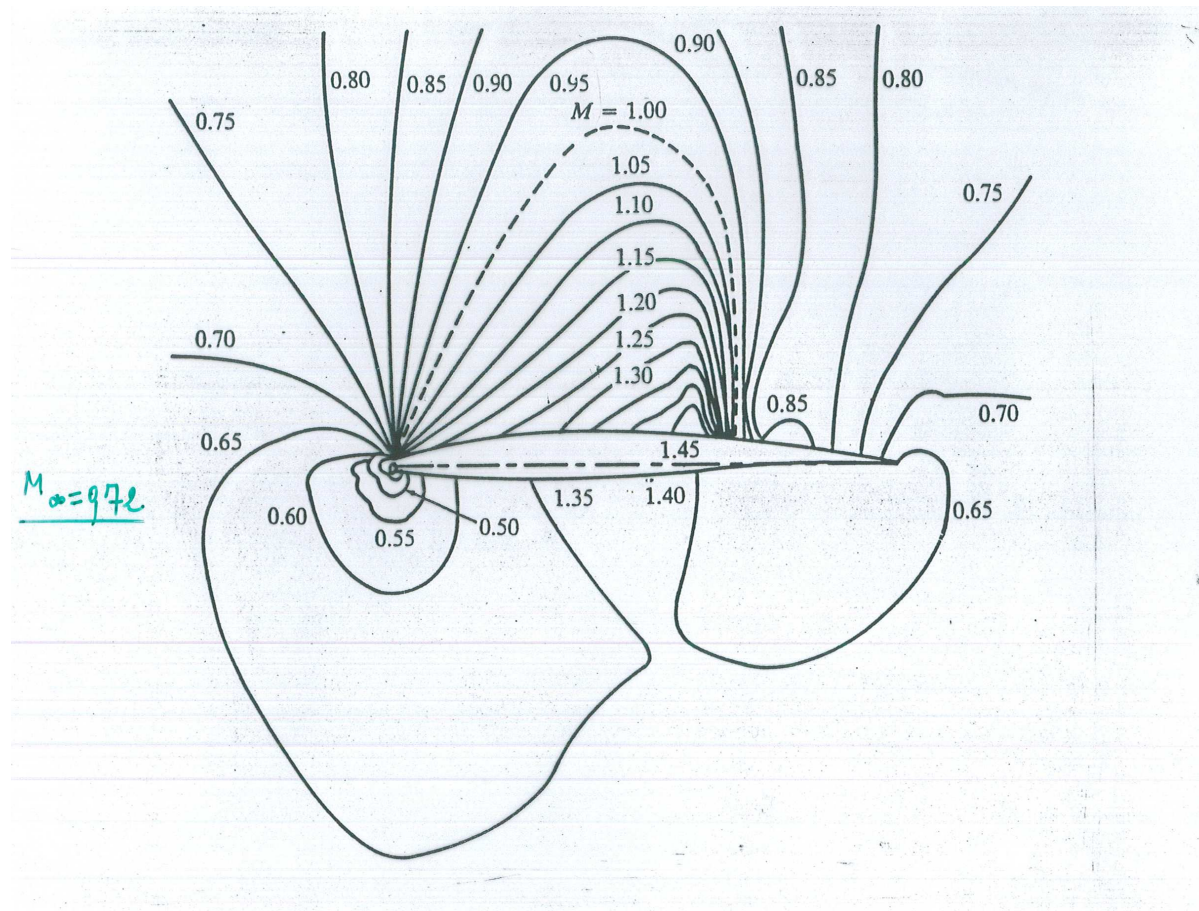
$$\text{Cas transsonique } |M_\infty^2 - 1| = o(1)$$

$$\frac{\varphi}{U_\infty l} = O(\epsilon^{2/3}), \quad \frac{u}{U_\infty} = O(\epsilon^{2/3}), \quad \frac{v}{U_\infty} = O(\epsilon)$$

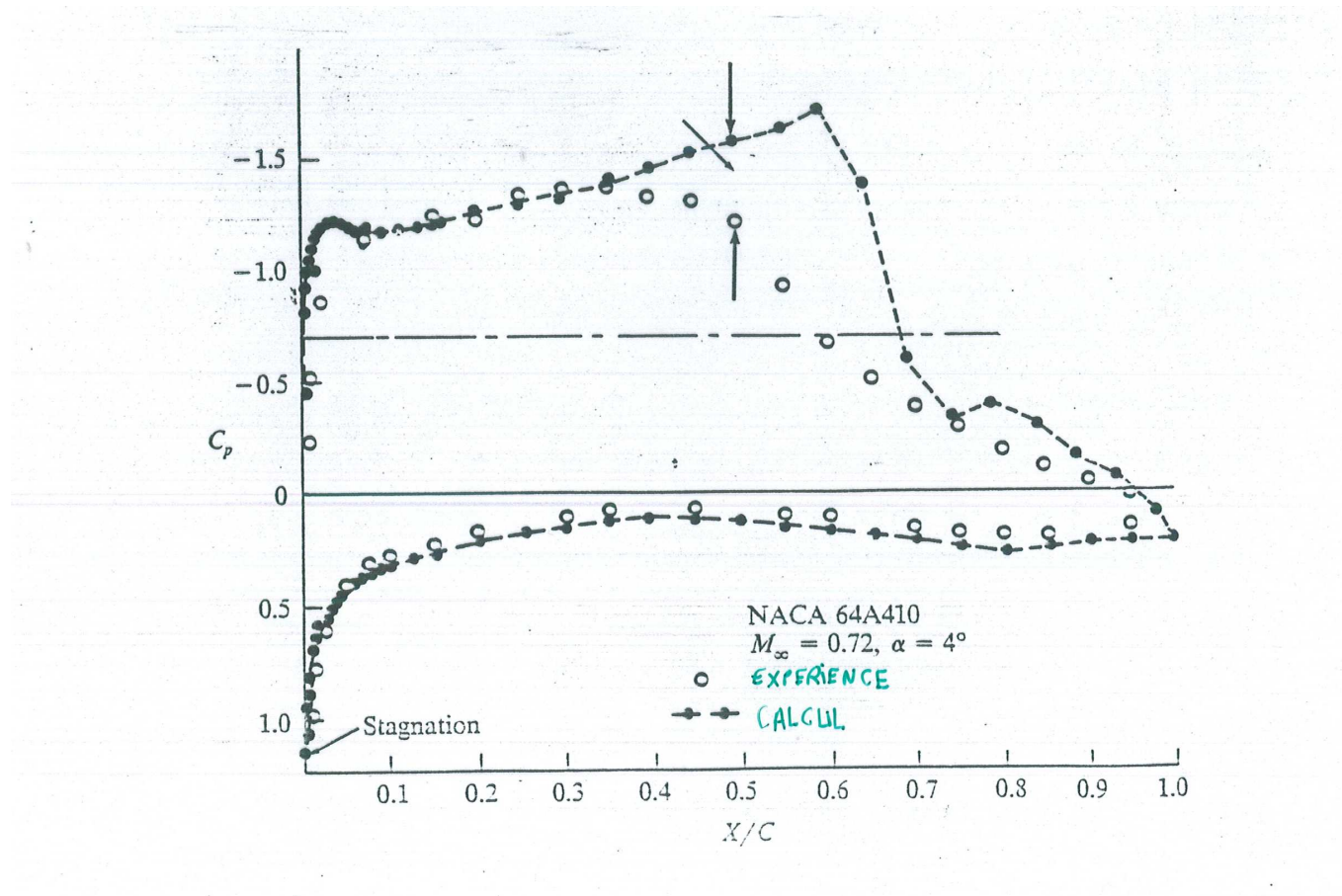
$$C_x = O(\epsilon^{5/3}), \quad C_y = O(\epsilon^{2/3})$$



Calculs numériques!

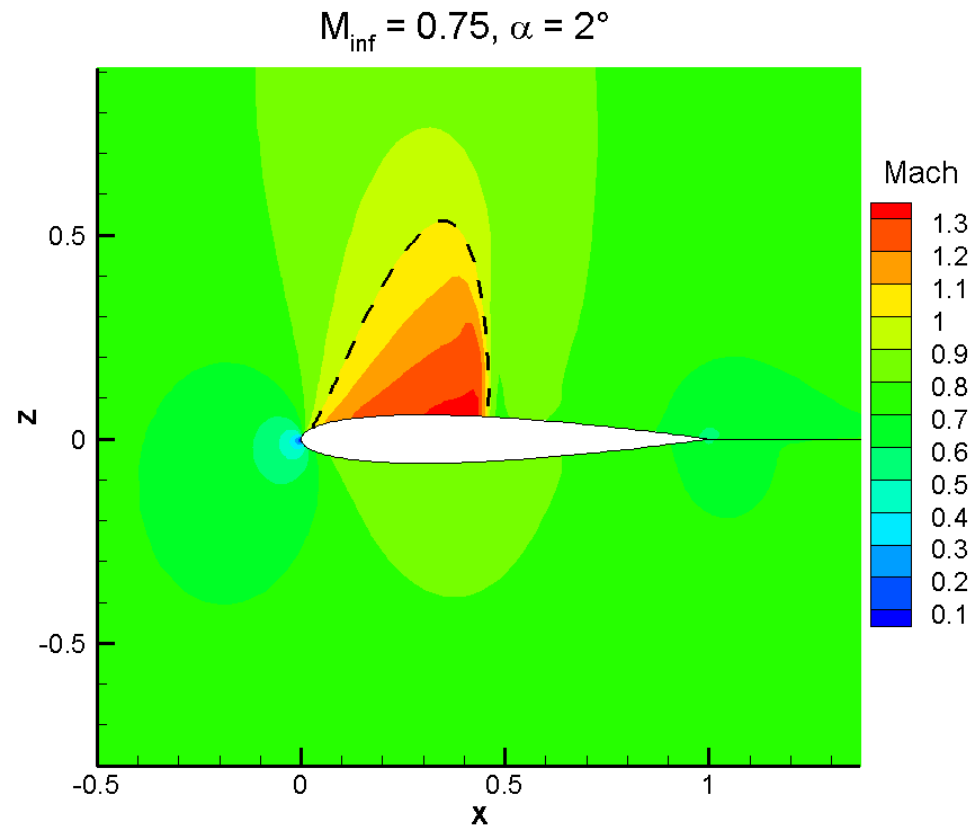


Euler (non visqueux) rotationnel (non homoentropique)



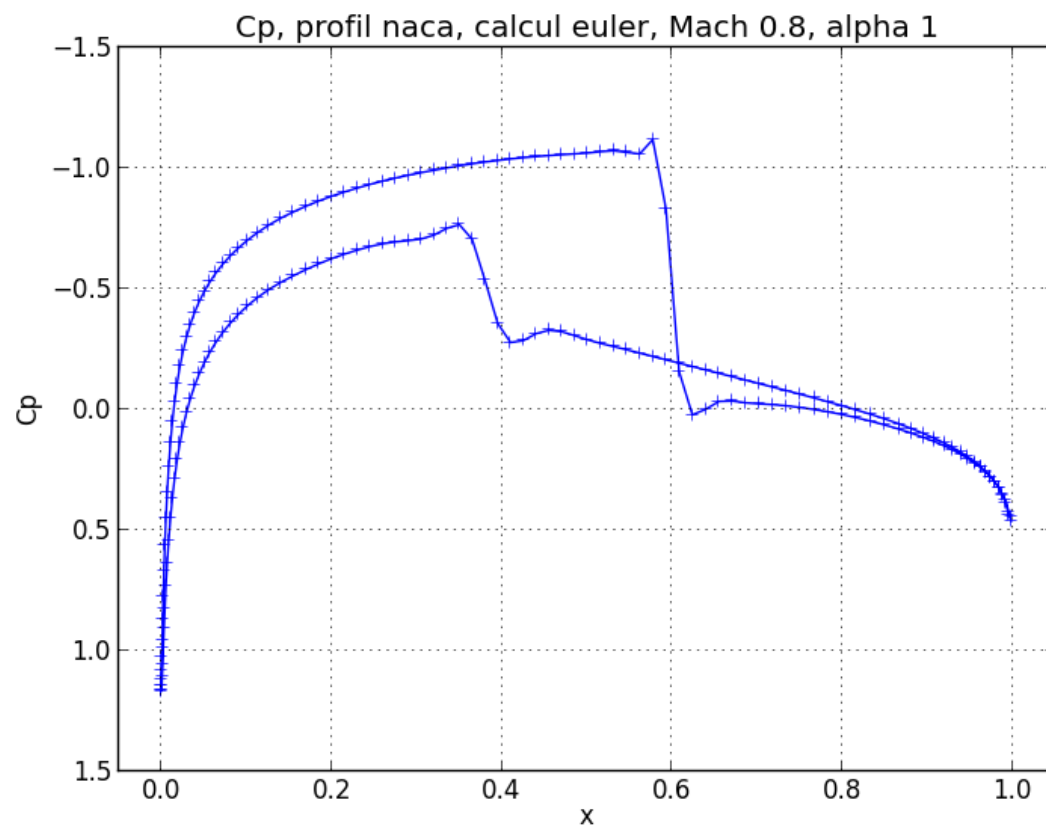
Coefficient de pression

Interaction couche limite-onde de choc sur l'extrados

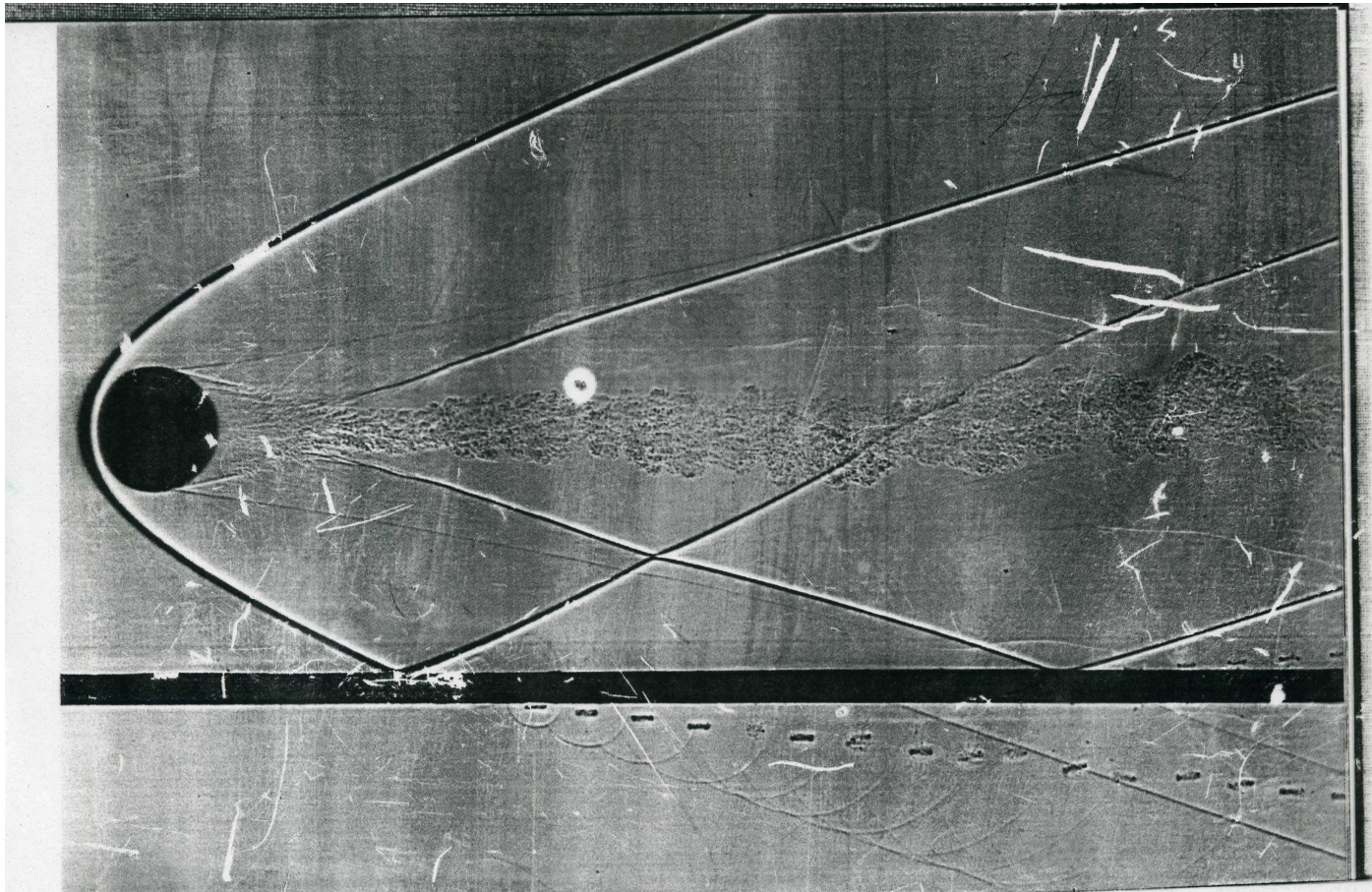


En PC9 numérique!

Profil symétrique NACA 0012



En PC9 numérique!
Profil symétrique NACA 0012



Fortement compressible

Faiblement compressible: acoustique

ACOUSTIQUE LINEAIRE

- Problème et linéarisation
 - Ecoulement potentiel
- Ecoulement à symétrie sphérique
- Application à une sphère vibrante
 - Source sonore. Application

Problème général

Ecoulement $(p', \rho', s', \underline{U}')$ continu (régulier) dans $\mathcal{E}(t)$

$$\frac{d\rho'}{dt} + \rho' \operatorname{div}(\underline{U}') = 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}(t) \quad (\text{Masse})$$

$$\rho' \frac{d\underline{U}'}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}}[p'] \quad \text{dans } \mathcal{E}(t) \quad (\text{Dynamique})$$

$$\frac{ds'}{dt} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}(t) \quad (\text{Energie})$$

Conditions aux limites

Etat initial: $\mathcal{E}(t_o)$ et $(p', \rho', \underline{U}')$ à t_o

Aux frontières: sur une surface $\Sigma(t)$ mobile $\underline{U}' \cdot \underline{N} = \underline{W} \cdot \underline{N}$

Problème linéarisé (acoustique linéaire)

Perturbation autour du repos uniforme (p_o, ρ_o)

$$p' = p_o + p, \quad \rho' = \rho_o + \rho, \quad \underline{U}' = \underline{u}$$
$$\frac{|p|}{p_o} \ll 1, \quad \frac{|\rho|}{\rho_o} \ll 1, \quad \frac{|\underline{u}|}{c_o} \ll 1$$

Homoentropique: $ds' = 0$ avec $p' = p'(\rho', s')$

$$p = c_o^2 \rho \quad \text{dans } \mathcal{E}_o \quad (c_o^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_o)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \operatorname{div}(\underline{u}) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}_o$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o} \underline{\operatorname{grad}}[p] \quad \text{dans } \mathcal{E}_o$$

Condition sur une surface $\Sigma(t)$

$$\underline{u} \cdot \underline{N} = \underline{W} \cdot \underline{N} \quad \text{sur } \Sigma(t_o)$$

Écoulement potentiel

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o} \underline{\text{grad}}[p] \quad (1), \quad \underline{\text{rot}}(1) : \quad \frac{\partial}{\partial t}[\underline{\text{rot}}(\underline{u})] = \underline{0}$$

$$\underline{u} = \underline{\text{grad}}[\phi], \quad \underline{\text{grad}}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + p/\rho_o\right] = \underline{0}, \quad p = -\rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Avec divergence de (1) et équations linéarisées

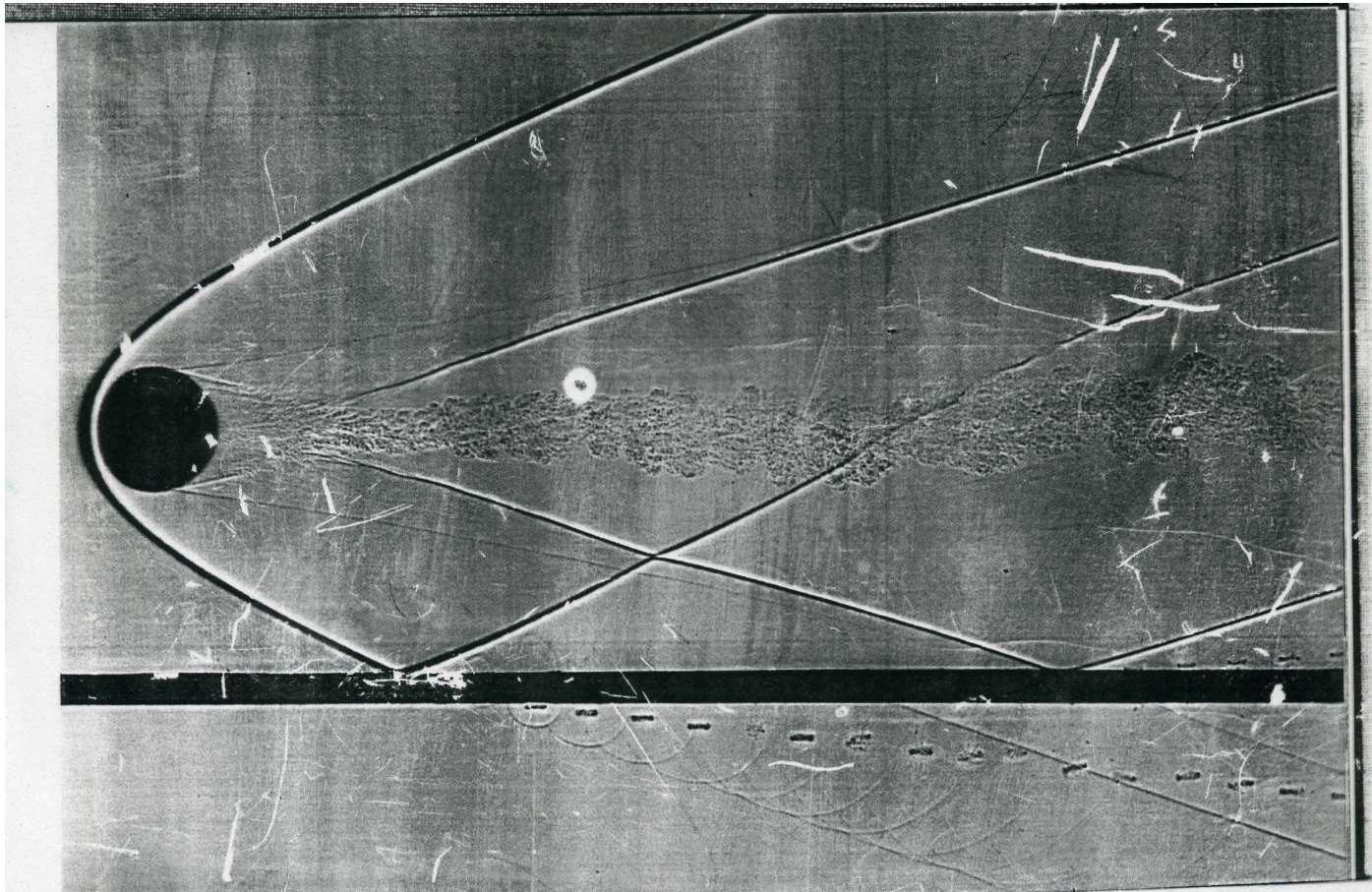
$$\frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \Delta a = 0, \quad a = p, \rho, \phi$$

Écoulement à symétrie sphérique

$$\underline{u} = u(r, t) \underline{e}_r, \quad \phi = \phi(r, t), \quad \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} [r\phi] = 0, \quad r > 0$$

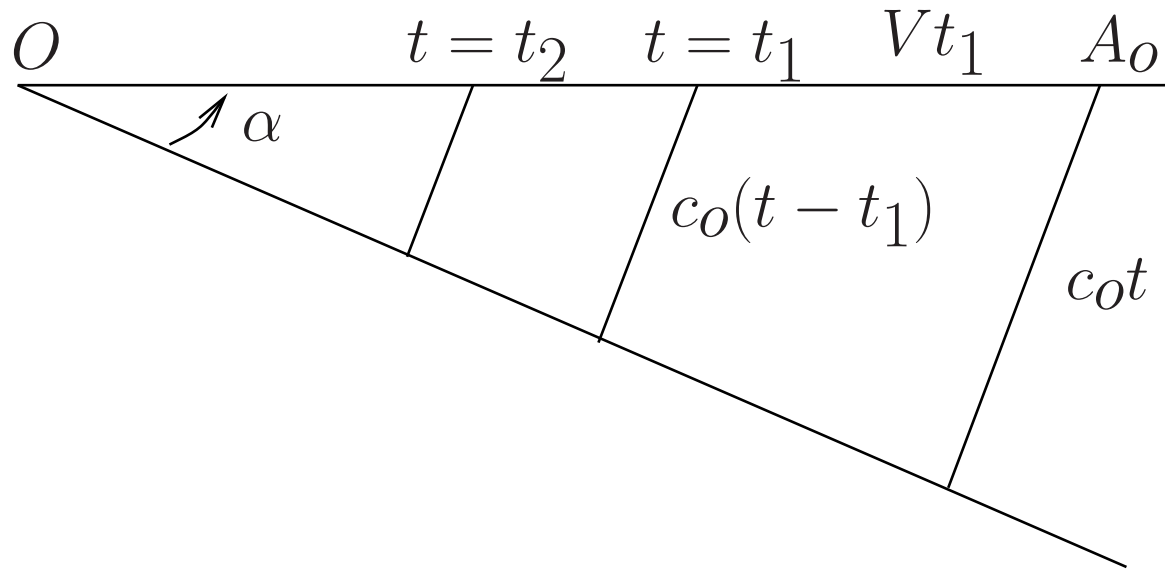
Solution générale

$$\phi = \frac{1}{r} \{ f(r - c_o t) + g(r + c_o t) \}, \quad p = c_o^2 \rho = \frac{\rho_o c_o}{r} \{ f'(r - c_o t) - g'(r + c_o t) \}$$



Fortement compressible
Faiblement compressible: acoustique

Application



$$d = OA_o, \quad \sin \alpha = \frac{c_o t}{d} = \frac{c_o(t - t_1)}{d - Vt_1}$$

$$d = Vt, \quad \sin \alpha = \frac{c_o}{V}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right), \quad M = \frac{V}{c_o}$$

PC9

Etude numérique de l'écoulement transsonique
par le Code Elsa de l'ONERA

Programme du sujet du mercredi 17 décembre 2025:

- 14h00-17h00 (écrit de 2h ou 3h)
 - Chapitres 1 à 7 inclus (pas les petits caractères)
- Documents autorisés: polycopié et transparents du cours, notes de cours, énoncés et notes de petites classes
 - Moodle: sujets antérieurs